

**Aufgabe 1-1:** Beweisen Sie

- a)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  (Ungleichung für geo- und arithmetisches Mittel)
- b)  $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$  (Schwarzsche Ungleichung)

**Aufgabe 1-2:** Beweisen Sie durch vollständige Induktion

- a)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- b)  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

**Aufgabe 1-3:**

Untersuchen Sie für welche  $x \in \mathbb{R}$  gilt

- a)  $x(x^2 + 3x - 1) > 3$
- b)  $\frac{2x}{x+4} < x$

**Aufgabe 1-4:**

Untersuchen Sie für welche  $x \in \mathbb{R}$  gilt

- a)  $|x-3| \leq |2x+1|$
- b)  $|x+1| + |x-2| < 4$

**Aufgabe 1-5:** Man berechne  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1 : z_2$ ,  $z_1^* \cdot z_2$ ,  $|z_1|$  und  $|z_2|$

- a)  $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$      $z_2 = 1 - j$
- b)  $z_1 = 2 + j3$      $z_2 = 3 - j5$
- c)  $z_1 = 4 - j5$      $z_2 = 4 + j5$
- d)  $z_1 = j$      $z_2 = -2 - j4$

**Aufgabe 1-6:** Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form  $z = x + jy$ .

- a)  $z = e^{j3\pi}$
- b)  $z = e^{-j\pi/3}$
- c)  $z = e^{j11\pi/6}$
- d)  $z = e^{j(3\pi/2 + 2n\pi)}, n \in \mathbb{Z}$

**Aufgabe 1-7:** Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der exponentiellen Form dar.

- a)  $z = j2$
- b)  $z = -1 - j$
- c)  $z = 3 - j\sqrt{3}$

**Aufgabe 1-8:** Man berechne Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

- a)  $z = \left( \frac{2-j}{1 - ((1+j)^2)^*} \right)^9, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- b)  $z = \left( \frac{1+j}{1-j} \right)^{99}$
- c)  $z = \left( \frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3}) \right)^n$

**Aufgabe 1-9:** Ermitteln Sie sämtliche Lösungen der Gleichungen

- a)  $z^3 = 3 - j\sqrt{3}$
- b)  $z^4 = 81$

**Aufgabe 1- 10:** In welchen Bereichen der Gaußschen Zahlenebene liegen die komplexen Zahlen  $z$ , für die die folgenden Beziehungen erfüllt sind.

- a)  $|z| < 1 \wedge |z-1| < 1$
- b)  $z \cdot z^* = 1$
- c)  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$
- d)  $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$

**Aufgabe 2-1:** Gegeben seien

$$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{b} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2, \quad \vec{c} = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_3.$$

Schreiben Sie die Vektoren

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

als Spaltenvektoren und berechnen Sie deren Betrag.

**Aufgabe 2-2:** Bestimmen sie den Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

- a)  $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- b)  $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$
- c)  $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3$

**Aufgabe 2-3:** Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- a)  $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$
- b)  $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{c}$
- c)  $\vec{a} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- d)  $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} + \vec{c}), (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- e)  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
- f)  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$  Spatprodukt

**Aufgabe 2-4:** Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind durch  $|\vec{a}| = 15, |\vec{b}| = 10, \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{a}) = 0,6, \cos \angle(\vec{e}_2, \vec{a}) = 0,8, \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{b}) = 0,4$  und  $\cos \angle(\vec{e}_2, \vec{b}) = 0,6$  gegeben. Berechnen Sie

- a) Die Koordinaten von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$
- b) Die Richtungswinkel  $\angle(\vec{e}_i, \vec{a})$  und  $\angle(\vec{e}_i, \vec{b})$
- c) Das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- d) Den Winkel  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$
- e) Die Projektion von  $\vec{a}$  auf  $\vec{b}$

**Aufgabe 2-5:** Berechnen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{c} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

- a) die orthogonale Zerlegung von  $\vec{a}$  längs  $\vec{b}$   
b) den Ausdruck  $((\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})) \cdot \vec{c}$ .

**Aufgabe 2-6:** Untersuchen Sie die folgenden Vektortripel auf lineare Abhängigkeit. Im Falle linearer Abhängigkeit bestimme man  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$  so, dass  $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$  gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2-7:** Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \quad \vec{c} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

linear unabhängig sind und stellen Sie den Vektor

$$\vec{d} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

als Linearkombination von  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  dar.

**Aufgabe 2-8:** Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie – falls möglich –  $\mathbf{AC}$ ,  $\mathbf{C}^T \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{BA}$ ,  $\mathbf{D}^T \mathbf{ABD}$ ,  $\mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \mathbf{AD}$  und  $\mathbf{D}^T \mathbf{B}^T + (\mathbf{A}^T \mathbf{D})^T$ .

**Aufgabe 2-9:** Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix an.

**Aufgabe 2-10:** Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $\det(\mathbf{A})$ ,  $\det(3\mathbf{A}^T)$ ,  $\det(\mathbf{A}^3)$  und  $\text{rang}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ .

**Aufgabe 2-11:** Gegeben sei mit  $a, b \in \mathbb{R}$  die  $n \times n$  Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+b & a & \cdots & a & a \\ a & a & a+b & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b & a \\ a & a & a & \cdots & a & a+b \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $\det(\mathbf{A})$ .

**Aufgabe 2-12:** Berechnen Sie mit Hilfe

$$\text{a) } \text{des Gauß-Algorithmus die Inverse der Matrix } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \text{der Cramer-Regel die Inverse der Matrix } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2-13:** Bestimmen Sie von den folgenden Matrizen jeweils die Eigenwerte und ein maximales System linear unabhängiger Eigenvektoren.

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$       b)  $\begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix},$       c)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

**Aufgabe 2-14:** Gegeben seien die symmetrischen Matrizen

a)  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$       b)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$       c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$       d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

e)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$       f)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$       g)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$       h)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Untersuchen Sie mit Hilfe der sog. Hauptabschnittsdeterminanten welche der obigen Matrizen positiv definit sind.

**Aufgabe 2-15:** Welche der folgenden quadratischen Formen  $q(x_1, x_2, x_3)$  sind positiv definit?

a)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$       b)  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,$       c)  $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

d)  $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3,$       e)  $3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2.$

**Aufgabe 3-1:** Berechnen Sie mittels Horner-Schema die Werte von  $f(x)$  an den angegebenen Stellen und bestimmen Sie die Zerlegung von  $f(x)$  in reelle Elementarfaktoren.

- a)  $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 4$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 2$   
 b)  $f(x) = 2x^7 - x^6 + 2x^5 + 71x^4 + 68x^3 - 52x^2$ ,  $x_0 = -3$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$   
 c)  $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8$ ,  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$

**Aufgabe 3-2:** Ermitteln Sie von den gebrochenrationalen Funktionen  $f(x)$  die Nullstellen und Polstellen. Geben Sie die Asymptoten an und skizzieren Sie den Graphen  $f(x)$  und die Asymptoten.

- a)  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6}$   
 b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x)(x - 3)^2}$   
 c)  $f(x) = \frac{x(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$

**Aufgabe 3-3:** Geben Sie die Zerlegung in reelle Partialbrüche an für

- a)  $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$   
 b)  $f(x) = \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x + 1)^2(x - 1)^2}$   
 c)  $f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2}$

**Aufgabe 3-4:** Drücken Sie

- a)  $\sin^6 x$  und  $\cos^7 x$  durch  $\sin kx$  und  $\cos kx$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  
 b)  $\cos 6x$  und  $\sin 7x$  durch  $\sin^k x$  und  $\cos^k x$ ,  $k \in \mathbb{N}$   
 aus.

**Aufgabe 3-5:** Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten.

- a)  $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$   $|x| \leq 1$   
 b)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$   $|x| \leq 1$   
 c)  $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$   $x \in \mathbb{R}$   
 d)  $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$   $|x| < 1$