

Aufgabe 1-1: Beweisen Sie

- a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0$ (Ungleichung für geo- und arithmetisches Mittel)
- b) $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ (Schwarzsche Ungleichung)

Aufgabe 1-2: Beweisen Sie durch vollständige Induktion

- a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- b) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Aufgabe 1-3:

Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

- a) $x(x^2 + 3x - 1) > 3$
- b) $\frac{2x}{x+4} < x$

Aufgabe 1-4:

Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

- a) $|x-3| \leq |2x+1|$
- b) $|x+1| + |x-2| < 4$

Aufgabe 1-5: Man berechne $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, $z_1^* \cdot z_2$, $|z_1|$ und $|z_2|$

- a) $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ $z_2 = 1 - j$
- b) $z_1 = 2 + j3$ $z_2 = 3 - j5$
- c) $z_1 = 4 - j5$ $z_2 = 4 + j5$
- d) $z_1 = j$ $z_2 = -2 - j4$

Aufgabe 1-6: Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $z = x + jy$.

- a) $z = e^{j3\pi}$
- b) $z = e^{-j\pi/3}$
- c) $z = e^{j11\pi/6}$
- d) $z = e^{j(3\pi/2 + 2n\pi)}, n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 1-7: Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der exponentiellen Form dar.

- a) $z = j2$
- b) $z = -1 - j$
- c) $z = 3 - j\sqrt{3}$

Aufgabe 1-8: Man berechne Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

- a) $z = \left(\frac{2-j}{1 - ((1+j)^2)^*} \right)^9, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- b) $z = \left(\frac{1+j}{1-j} \right)^{99}$
- c) $z = \left(\frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3}) \right)^n$

Aufgabe 1-9: Ermitteln Sie sämtliche Lösungen der Gleichungen

- a) $z^3 = 3 - j\sqrt{3}$
- b) $z^4 = 81$

Aufgabe 1- 10: In welchen Bereichen der Gaußschen Zahlenebene liegen die komplexen Zahlen z , für die die folgenden Beziehungen erfüllt sind.

- a) $|z| < 1 \wedge |z-1| < 1$
- b) $z \cdot z^* = 1$
- c) $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$
- d) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$

Aufgabe 2-1: Gegeben seien

$$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{b} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2, \quad \vec{c} = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_3.$$

Schreiben Sie die Vektoren

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

als Spaltenvektoren und berechnen Sie deren Betrag.

Aufgabe 2-2: Bestimmen sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- a) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- b) $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$
- c) $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3$

Aufgabe 2-3: Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- a) $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$
- b) $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{c}$
- c) $\vec{a} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- d) $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} + \vec{c}), (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
- f) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ Spatprodukt

Aufgabe 2-4: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind durch $|\vec{a}| = 15, |\vec{b}| = 10, \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{a}) = 0,6, \cos \angle(\vec{e}_2, \vec{a}) = 0,8, \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{b}) = 0,4$ und $\cos \angle(\vec{e}_2, \vec{b}) = 0,6$ gegeben. Berechnen Sie

- a) Die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- b) Die Richtungswinkel $\angle(\vec{e}_i, \vec{a})$ und $\angle(\vec{e}_i, \vec{b})$
- c) Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- d) Den Winkel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$
- e) Die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

Aufgabe 2-5: Berechnen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{c} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

- a) die orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$
 b) den Ausdruck $((\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})) \cdot \vec{c}$.

Aufgabe 2-6: Untersuchen Sie die folgenden Vektortripel auf lineare Abhängigkeit. Im Falle linearer Abhängigkeit bestimme man $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ so, dass $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$ gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2-7: Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \quad \vec{c} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

linear unabhängig sind und stellen Sie den Vektor

$$\vec{d} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Aufgabe 2-8: Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie – falls möglich – $\mathbf{AC}$, $\mathbf{C}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{D}^T \mathbf{ABD}$, $\mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \mathbf{AD}$ und $\mathbf{D}^T \mathbf{B}^T + (\mathbf{A}^T \mathbf{D})^T$.

Aufgabe 2-9: Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

b)
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix an.

Aufgabe 2-10: Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$, $\det(3\mathbf{A}^T)$, $\det(\mathbf{A}^3)$ und $\text{rang}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$.

Aufgabe 2-11: Gegeben sei mit $a, b \in \mathbb{R}$ die $n \times n$ Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+b & a & \cdots & a & a \\ a & a & a+b & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b & a \\ a & a & a & \cdots & a & a+b \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

Aufgabe 2-12: Berechnen Sie mit Hilfe

a) des Gauß-Algorithmus die Inverse der Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) der Cramer-Regel die Inverse der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3-1: Berechnen Sie mittels Horner-Schema die Werte von $f(x)$ an den angegebenen Stellen und bestimmen Sie die Zerlegung von $f(x)$ in reelle Elementarfaktoren.

- a) $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 4$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$
 b) $f(x) = 2x^7 - x^6 + 2x^5 + 71x^4 + 68x^3 - 52x^2$, $x_0 = -3$, $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$
 c) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8$, $x_0 = -2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Aufgabe 3-2: Ermitteln Sie von den gebrochenrationalen Funktionen $f(x)$ die Nullstellen und Polstellen. Geben Sie die Asymptoten an und skizzieren Sie den Graphen $f(x)$ und die Asymptoten.

- a) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6}$
 b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x)(x - 3)^2}$
 c) $f(x) = \frac{x(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$

Aufgabe 3-3: Geben Sie die Zerlegung in reelle Partialbrüche an für

- a) $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$
 b) $f(x) = \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x + 1)^2 (x - 1)^2}$
 c) $f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2 (x^2 + x + 1)^2}$

Aufgabe 3-4: Drücken Sie

- a) $\sin^6 x$ und $\cos^7 x$ durch $\sin kx$ und $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}_0$,
 b) $\cos 6x$ und $\sin 7x$ durch $\sin^k x$ und $\cos^k x$, $k \in \mathbb{N}$
 aus.

Aufgabe 3-5: Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten.

- a) $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ $|x| \leq 1$
 b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $|x| \leq 1$
 c) $\operatorname{ar sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ $x \in \mathbb{R}$
 d) $\operatorname{ar tanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ $|x| < 1$

Aufgabe 3-6: Zeigen Sie mit der Grenzwertdefinition ($\varepsilon, N_\varepsilon$ - Definition)

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ mit $a_n \geq 0 \forall n$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Aufgabe 3-7: Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. deren Grenzwert.

- a) $a_n = 2^{-n} (2^n + (-2)^n)$
- b) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$
- c) $a_n = \sqrt{\frac{2n^3 - n^2 - n + 1}{3n^3 - 1}}$
- d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n+3}$
- e) $a_n = \frac{2n+1}{n^2} + \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{n}{n+1}$
- f) $a_n = \frac{1}{n+2} \left(\frac{n^3 + 3n - 1}{n^2} + 3n \right)$

Aufgabe 3-8: Zeigen Sie

- a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
- b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \leq 1$
- c) $2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < 3$

Aufgabe 3-9:

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der (ε, δ) - Definition $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + e^{-1/x}} = 1$
- b) Berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$
- c) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = \tanh\left(\frac{1}{x}\right)$ im Nullpunkt stetig ergänzbar ist.

Aufgabe 2-13: Bestimmen Sie von den folgenden Matrizen jeweils die Eigenwerte und ein maximales System linear unabhängiger Eigenvektoren.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 2-14: Gegeben seien die symmetrischen Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$ f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Untersuchen Sie mit Hilfe der sog. Hauptabschnittsdeterminanten welche der obigen Matrizen positiv definit sind.

Aufgabe 2-15: Welche der folgenden quadratischen Formen $q(x_1, x_2, x_3)$ sind positiv definit?

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$ b) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,$ c) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

d) $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3,$ e) $3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2.$

Aufgabe 4-1: Bestimmen Sie durch Grenzübergang die Ableitung von

- a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ an der Stelle $x = 5$.
b) $f(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4-2: Bestimmen Sie die Ableitung von

- a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sin^3(1-x)}$
c) $f(x) = \cos^2(\arctan(e^x))$
d) $f(x) = \arctan(x^x) + (\arctan x)^x$
e) $f(x) = \ln(\sin x) + \frac{1}{2} \cot^2 x$
f) $f(x) = x^{x \cos x} \quad (x > 0)$
g) $f(x) = \ln(x \cos x)$
h) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Aufgabe 4-3: Zeigen Sie mittels Induktion

$$\frac{d}{dx} \left(\prod_{i=1}^n f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dx} (f_i(x)) \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^n f_j(x) \right).$$

Aufgabe 4-4: Lösen Sie näherungsweise die folgenden Gleichungen

- a) $\sinh x = x^3 - x$ für $x \in [1, 2]$
b) $x \tan x = 1$ für $x \in [0.7, 1.1]$.
c) $x^2 = \cos x$ für $x \in [0.5, 1]$.

Begründen Sie Ihre Vorgehensweise und geben Sie eine Fehlerabschätzung für die Näherungslösung an.

Aufgabe 4-5: Berechnen Sie die Grenzwerte der Funktionen

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2 \cos x}{x^4}$
b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$
c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x} \right)$
d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) \ln(1-x)$
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$
f) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

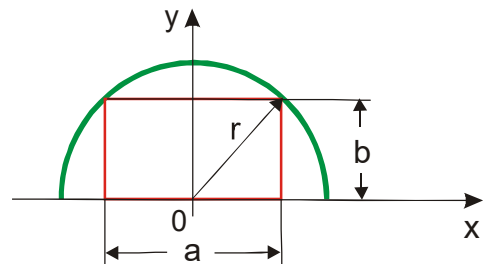
Aufgabe 4-6: Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, relative und absolute Extremwerte, Wendepunkte sowie das asymptotische Verhalten und skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

- a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 4}$
- b) $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^2$
- c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

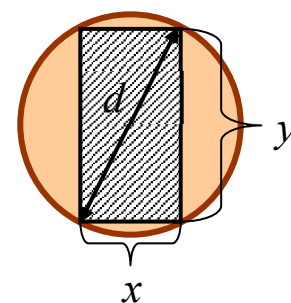
Aufgabe 4-7: Extremwertaufgaben

- a) Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang l ist dasjenige mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen.
- b) Welche Abmessungen muss ein Zylinder mit dem Volumen V_z besitzen, wenn seine Oberfläche O_z minimal sein soll?

- c) Einem Halbkreis soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden, vgl. Abb. Berechnen Sie die Abmessungen des Rechtecks und geben Sie den Flächeninhalt des Rechtecks relativ zum Flächeninhalt des Halbkreises in Prozent an.



- d) Aus einem kreisförmigen Baumstamm mit dem Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt herausgeschnitten werden, der maximale Tragfähigkeit besitzt. Die Tragfähigkeit eines Balkens sei durch $T = cxy^2$ gegeben, wobei x die Breite, y die Höhe und $c > 0$ die Materialkonstante des Balkens angibt. Wie müssen x und y gewählt werden, um maximale Tragfähigkeit zu erreichen?



- e) Ein Körper mit der Masse m soll auf einer horizontalen Unterlage mit dem Reibungskoeffizienten $\mu = 0,2$ von der Zugkraft F gleichförmig fortbewegt werden. Wie groß muss der Winkel α zwischen F und der Horizontalen gewählt werden, damit F minimal wird?

