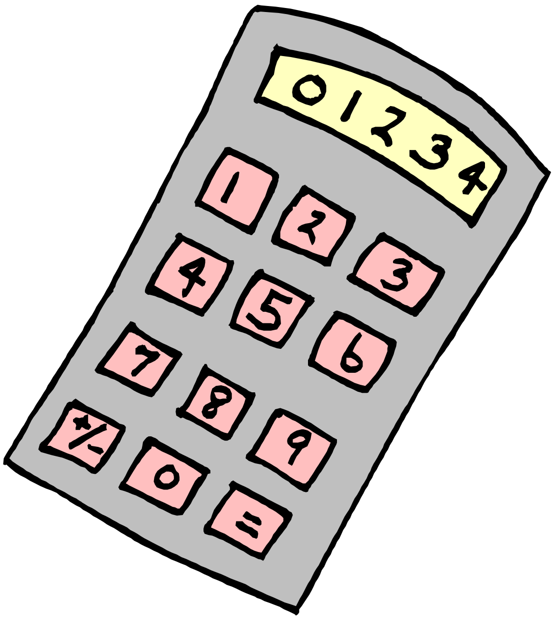
HOCHSCHULE BREMEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Propädeutikum

Wichtige Grundlagen der Mathematik



Stand WS 2011 / 2012

Wichtige Grundlagen der Mathematik

Für Ihr Studium – und sicher nicht nur für das Fach Wirtschaftsmathematik – benötigen Sie einige Mathe-Schulkenntnisse. Um diese aufzufrischen, finden Sie in diesem Skript noch einmal die wichtigsten Rechengesetze zum Nachschlagen sowie viele Übungsaufgaben mit Lösungen.

Bitte beachten Sie: Trotz aller Sorgfalt können auch mir (Tipp-) Fehler unterlaufen. Sollte Ihnen etwas auffallen, benachrichtigen Sie mich bitte.

Inhaltsverzeichnis

Zahlenbereiche und allgemeine Rechenregeln

Im Studium benötigte **Zahlenbereiche:**

Menge der natürlichen Zahlen: N = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , . . .}

Menge der ganzen Zahlen: Z = { . . . , –4 , –3 , –2 , –1 , 0 , 1 , 2 , 3 , . . .}

Menge der rationalen Zahlen (Brüche oder Quotienten): $Q = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{17}, \ \ldots \right\}$

Menge der Reellen Zahlen: R enthält zusätzlich zu Q auch $\sqrt{2}$, P , e usw.

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz):

a + b = b + a   a • b = b • a

Beispiele:

1) x + y + a + 5 = 5 + x + a + y = a + y + 5 + x usw.
(man könnte weitere Gleichheiten hinzufügen; wieviele?)

2) 2 + x + a + 5 + a + 3x = x + 3x + a + a + 2 + 5 = 4x + 2a + 7
Das Kommutativgesetz braucht man also oft, um gleichnamige Glieder zusammenzufassen.

3) cde = dec = ecd

4) 6abx • 7 = 6 • 7 • abx = 42abx
(Bemerkung: Der Malpunkt kann geschrieben oder auch weggelassen werden; wenn konkrete Zahlen am Ende stehen wird er in der Regel geschrieben: 6ac • 7 bzw. man setzt eine Klammer: (6ac)7.

5) a • x • b • x • a = a• a • b • x • x = a^2 b x^2

Assoziativgesetz: Die Reihenfolge der Zusammenfassung spielt keine Rolle.

(a + b) + c = a + (b + c)   (a• b) • c = a • (b • c)

Beispiele:

1) (a + b) + (c + d + e) = a + b + c + d + e

2) (x + 2 + y) + (6 + a + y) = a + x + 2y + 8

3) (ab) (cd) = abcd

4) (3xy) (2ab) = 3 • 2 • xyab = 6abxy

5) (zw) (7x) (8zw) (3x) = 3 • 7 • 8 • x • x • w • w • z • z = 168 x^2 w^2 z^2

Die beiden Operationen Addition und Multiplikation stehen durch das **Distributivgesetz** miteinander in Beziehung:

$a\,(b + c) = ab + ac \qquad (a + b) \bullet c = ac + bc$

Dies ist also das Gesetz für das Rechnen mit Klammern.

Beispiele:

1) $a\,(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae$
2) $(x_1 + x_2 + x_3) \bullet y = x_1y + x_2y + x_3y$
3) $b\,(7a + 5b + c) = 7ab + 5b^2 + bc$
4) $2xy\,(x + 6y + z) = 2x^2y + 12xy^2 + 2xyz$

Ausklammern:

Wie jede mathematische Gleichung kann man das Distributivgesetz von links nach rechts oder von rechts nach links lesen und dementsprechend verschieden interpretieren. Bisher haben wir es von links nach rechts gelesen, d.h. $a(b+ c)$ war der Ausgangspunkt, $ab + ac$ das Ergebnis. Umgekehrt gelesen, d.h. $ab + ac = a(b + c)$ ergibt es die **Regel für das Ausklammern:**

Wenn ein Faktor in jedem Glied einer Summe auftritt, so kann dieser Faktor ausgeklammert werden.

Beispiele:

1) $abc + ad + ae = a\,(bc + d + e)$
2) $a^2 + 2abc + axy = a\,(a + 2bc + xy)$
3) $4a + 6b + 10c = 2 \bullet 2a + 2 \bullet 3b + 2 \bullet 5c = 2\,(2a + 3b + 5c)$
4) $2xy + 4x^2y^2 + 8xyz = 2xy\,(1 + 2xy + 4z)$

Die Probe für richtiges Ausklammern ist erneutes Ausmultiplizieren der Klammer: Es muss dann der Ausdruck entstehen, von dem man ausgegangen ist.

Oftmals kann man durch Ausklammern auch komplizierte Brüche einfacher machen:

5) $\dfrac{5x + 15}{5 + 15x} = \dfrac{5 \cdot (x + 3)}{5 \cdot (1 + 3x)} = \dfrac{x + 3}{1 + 3x}$

Auch beim **Produkt zweier Klammern** muss jedes Element der einen Klammer unter Beachtung der Vorzeichenregeln mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert werden.

Beispiele:

1. $(2+x)(1+y)=(2\cdot 1)+(2\cdot y)+(x\cdot 1)+(x\cdot y)=2+2y+x+xy$
2. $(x-3)(5-y)=(x\cdot 5)+(x\cdot(-y))+((-3)\cdot 5)+((-3)\cdot(-y))=5x-xy-15+3y$
3. $(2x - 3y) \bullet (5u + 3w) = 10ux + 6wx - 15uy - 9wy$
4. $(x - 2y) \bullet (2a - 3b + 4c) = 2ax - 3bx + 4cx - 4ay + 6by - 8cy$
5. $\dfrac{(10x-5y)(3z-4)}{(2x-y)(4z-3)}=\dfrac{5(2x-y)(3z-4)}{(2x-y)(4z-3)}=\dfrac{15z-20}{4z-3}$

Vorzeichenregeln:

Zu jeder Zahl a kann man die zugehörige entgegengesetzte Zahl –a finden; die Summe einer Zahl und ihrer entgegengesetzten Zahl ergibt gerade Null:
$a + (-a) = 0$.

Es gelten folgende **Vorzeichenregeln:**			
$-(-a) = a$	$(-a) \bullet b = -ab$	$a \bullet (-b) = -ab$	$(-a) \bullet (-b) = ab$

Plus mal Minus oder Minus • Plus ergibt Minus. Minus mal Minus ergibt Plus.

Beispiele:

1) $(-3)\,(a + b - c) = -3a - 3b + 3c$
2) $6a\,(-3a + 5b - c) = -18a^2 + 30ab - 6ac$
3) $4 - (5 + 7 - 9 + 3) = 4 - 5 - 7 + 9 - 3 = -2$
4) $(2u - 3v + 7w) \bullet (-2u) = -4u^2 + 6uv - 14wu$

Bitte beachten: Punktrechnung geht vor Strichrechnung

Beispiele:

1) $3 + 11 \bullet 4 = 3 + 44 = 47$
2) $16 : 4 - 3 = 4 - 3 = 1$
3) $4 + 3 \bullet 7 - 4 : 2 = 4 + 21 - 2 = 23$
4) $2 \bullet 4 - 8 \bullet 3 + 36 : 18 = 8 - 24 + 2 = -14$

Rechnen mit Klammern

Eine Zahl wird mit einer in einer Klammer stehenden Summe multipliziert, indem diese Zahl unter Beachtung der Vorzeichenregeln mit jedem Summanden multipliziert wird.

Beispiele:

1) $5 \bullet (a + b + c) = 5a + 5b + 5c$

2) $4\,(a - b - 2c) = 4a - 4b - 8c$

3) $(x + 2y - 3z) \bullet (-x) = -x^2 - 2xy + 3xz$

Die **Reihenfolge der Berechnung** wird von den Klammern vorgeschrieben.

Treten in einer Aufgabe Klammern auf, so werden die in der Klammer stehenden Ausdrücke zuerst berechnet, auch wenn die Klammern durch Multiplikationszeichen miteinander verbunden sind.

Beispiele:

1) $(4+3)\cdot(6:2)+(4\cdot 2)=7\cdot 3+8=21+8=29$

2) $(-2) : (-4 + 3) + (4 \bullet 7) = (-2) : (-1) + 28 = 30$

3) $(5 + 4 \bullet 3) \bullet (3 - 2 \bullet 4) \bullet (11 - 3 \bullet 7) = 17 \bullet (-5) : (-10) = (-85) : (-10) = 8{,}5$

Steht vor einer Klammer ein **Minuszeichen**, so verändern sich die Vorzeichen der Faktoren in der Klammer, wenn man diese auflöst.

z.B.: $3 - (8 - x) = 3 - 8 + x = -5 + x$

Reihenfolge (Klammern in Klammern):
Treten mehrere Klammern ineinander verschachtelt auf, so beginnt man bei der innersten Klammer mit der Auflösung und arbeitet sich nach außen vor.

Beispiele:

1) $\left[(4+3)\cdot 3\right]:(5+2)=\left[7\cdot 3\right]:7=21:7=3$

2) $4x - [2y - (4x - 6y) + 7x] - 6y = 4x - [2y - 4x + 6y + 7x] - 6y =$
$4x - [8y + 3x] - 6y = 4x - 8y - 3x - 6y = x - 14y$

3)
$$5a-\left\{2b+3\left[c-2(c-a)+b\right]-5a\right\}=$$
$$=5a-\left\{2b+3\left[c-2c+2a+b\right]-5a\right\}=$$
$$=5a-\left\{2b+3\left[-c+2a+b\right]-5a\right\}=$$
$$=5a-\left\{2b-3c+6a+3b-5a\right\}=$$
$$=5a-\left\{5b-3c+a\right\}=4a-5b+3c$$

Beträge

Steht ein Ausdruck in Betragsstrichen, so ist nur nach dem absoluten Wert des Ergebnisses gefragt, d.h. ein mit Betragsstrichen versehener Ausdruck hat immer ein positives Ergebnis (z.B. bei der Flächenberechnung mit Integralen).

Es gilt: $|a| = \begin{Bmatrix} a \text{ für } a \geq 0 \\ -a \text{ für } a < 0 \end{Bmatrix}$

Beispiele:

1) $|-3+6-12| = |-9| = 9$

2) $|4-7| \bullet (-3) = |-3| \bullet (-3) = 3 \bullet (-3) = -9$

Aufgaben zu den allgemeinen Rechenregeln:

Aufgaben 1 – 16

Bruchrechnung

Definitionen

Ein Bruch besteht aus zwei Elementen, dem Zähler über dem Bruchstrich und dem Nenner unter dem Bruchstrich.

Der Nenner (N) gibt an, in wie viele Teile ein Ganzes (G) geteilt werden soll. Der Zähler (Z) gibt die Anzahl der Teile an.

Beispiel: $\dfrac{3 \triangleleft \text{Zähler(Z)}}{4 \triangleleft \text{Nenner(N)}}$

Ein Ganzes wurde in 4 Teile geteilt (1/4), davon 3 Stück.

Beispiel: Wie groß sind $\dfrac{5}{16}$ der Gesamtfläche von 144 m^2 ?

$(144\ m^2 : 16) \cdot 5 = 9\ m^2 \cdot 5 = 45\ m^2$

Achtung: Der Nenner eines Bruches darf niemals Null sein.

Es gilt: $\dfrac{a}{0}$ ist nicht definiert aber $\dfrac{0}{a} = 0$

Bezeichnungen:

- $\dfrac{a}{b} < 1$ echter Bruch
- $\dfrac{a}{b} \geq 1$ unechter Bruch
- gemischte Zahl: Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruch, z.B.
  $2\dfrac{1}{2} = 2 + \dfrac{1}{2} = 2{,}5$ $\quad$ $\text{Achtung: Nicht } 2 \bullet \dfrac{1}{2} = 1$

Vorzeichen:

Ein Minuszeichen kann im Zähler, im Nenner oder vor dem gesamten Bruch stehen.

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Ist die Zahl der Minuszeichen gerade, ist der Wert des Bruches positiv, ist die Anzahl ungerade, ist der gesamte Bruch negativ.

Beispiele: $-\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{b}$ $\qquad$ $-\dfrac{a}{-(4-7)} = -\dfrac{a}{-(-3)} = -\dfrac{a}{3}$

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Ein Bruch wird erweitert, in dem man sowohl den Nenner als auch den Zähler mit der gleichen Zahl multipliziert. (Diese Zahl darf nicht Null sein)

$$\boxed{\frac{Z}{N} \text{ erweitert um a: } \frac{Z \bullet a}{N \bullet a} \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad N \neq 0}$$

Beispiel: $\frac{2}{5}$ soll mit 4 erweitert werden: $\frac{2 \bullet 4}{5 \bullet 4} = \frac{8}{20}$

Für das **Kürzen von Brüchen** gilt gleiches: Ein Bruch wird gekürzt, in dem man sowohl den Nenner als auch den Zähler durch die gleiche von Null verschiedene Zahl teilt.

$$\boxed{\text{Es gilt } \frac{Z}{N} \text{ gekürzt um a: } \frac{Z : a}{N : a} \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad N \neq 0}$$

Beispiel: $\frac{9}{12}$ soll mit 3 gekürzt werden: $\frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$

Achtung: Durch Differenzen und durch Summen kürzen nur die Dummen.

Beispiele: $\frac{x^2 + axy}{3x} = \frac{x(x + ay)}{x(3)} = \frac{x + ay}{3}$ $\qquad$ $\frac{ax + by}{ax} \neq \frac{1 + by}{1}$

Kehrwert eines Bruches: Zähler und Nenner vertauschen:

Beispiele: $\frac{b}{a}$ ist der Kehrwert von $\frac{a}{b}$ $\qquad$ $\frac{1}{a}$ ist der Kehrwert von a

Umwandeln von ganzen Zahlen und Dezimalzahlen in Brüche

Will man eine ganze Zahl als Bruch ausdrücken, so steht die ganze Zahl im Zähler und wird mit dem neuen Nenner multipliziert.

Beispiele: $4 = \frac{4 \bullet 1}{1} = \frac{4}{1}$ $\qquad$ $5 = \frac{5 \bullet 2}{2} = \frac{10}{2}$

Eine Dezimalzahl wird in einen Bruch umgewandelt, in dem man die Zahl vor dem Komma als ganze Zahl stehen lässt und je nach Anzahl der Nachkommastellen durch 10, 100, 1000 etc. teilt. (Es müssen so viele Nullen an die „1“ im Nenner angefügt werden, wie Stellen nach dem Komma gegeben sind.)

Beispiele: $2{,}75 = 2\frac{75}{100} = \frac{275}{100}$ $\qquad$ $5{,}3519 = 5\frac{3519}{10.000} = \frac{53519}{10.000}$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Zwei Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man bei gleichem Nenner die Zähler addiert.

$$\boxed{\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \qquad N \neq 0}$$

Beispiele: $\frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ $\qquad \frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

Weisen die Brüche allerdings verschiedene Nenner auf, so müssen diese erst durch Kürzen oder Erweitern gleichnamig gemacht werden (**Hauptnenner**).

Beispiele:

- $\frac{6}{9} + \frac{4}{3} = \frac{6:3}{9:3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$
- $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$
- $\frac{4}{8} - \frac{5}{16} = \frac{8}{16} - \frac{5}{16} = \frac{3}{16}$

Multiplikation von Brüchen

Brüche werden multipliziert, in dem man die Zähler der beiden Brüche multipliziert und die Nenner miteinander multipliziert.

$$\boxed{\frac{a}{c} \bullet \frac{b}{d} = \frac{a \bullet b}{c \bullet d} \qquad c, d \neq 0}$$

Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem der Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert wird:

$$\boxed{\frac{a}{b} \bullet c = \frac{a}{b} \bullet \frac{c}{1} = \frac{a \bullet c}{b}}$$

Beispiele:

- $\frac{6}{8} \bullet 5 = \frac{6 \bullet 5}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$
- $\frac{2}{3} \bullet (-4) = \frac{2 \bullet (-4)}{3} = -\frac{8}{3}$

Division von Brüchen

Brüche werden dividiert, in dem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des 2. Bruches multipliziert.

$$\boxed{\frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\bullet\frac{d}{b}=\frac{a\bullet d}{c\bullet b} \qquad b, c, d \neq 0}$$

Beispiel: $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1}=\frac{4}{3}$

So kann man auch einen Doppelbruch auflösen, denn er ist nichts anderes als die Division von zwei Brüchen.

Beispiel: $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}}=\frac{3}{2}:\frac{5}{7}=\frac{3}{2}\bullet\frac{7}{5}=\frac{21}{10}$

Man teilt einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert:

$$\boxed{\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\bullet\frac{1}{c}=\frac{a}{b\bullet c}}$$

Beispiele: $\frac{1}{3}:4=\frac{1}{3\bullet 4}=\frac{1}{12}$ $\qquad$ $\frac{5}{2}:3=\frac{5}{2\cdot 3}=\frac{5}{6}$

Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividiert, in dem man die Zahl mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert.

$$a:\frac{b}{c}=a\bullet\frac{c}{b}=\frac{a\bullet c}{b} \qquad c, b \neq 0$$

Beispiel: $5:\frac{4}{3}=5\bullet\frac{3}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}=3{,}75$

Aufgaben zur Bruchrechnung:

Aufgaben 17 – 38

Binomische Formeln

Wie Sie vom Distributivgesetz her wissen, gilt folgendes:

$(a + b)^2 = (a + b) \bullet (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = (a - b) \bullet (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b) \bullet (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Diese Berechnungen bezeichnet man auch als **binomische Formeln:**

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b) \bullet (a - b) = a^2 - b^2$

Beispiele:

- $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$
- $\left(\frac{1}{2}x + 4y\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4xy + 16y^2$
- $(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$
- $(12 - a)^2 = 144 - 24a + a^2$
- $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$
- $(5x - 9) \bullet (5x + 9) = 25x^2 - 81$

Eine Anwendungsmöglichkeit der binomischen Formeln ist das **Kopfrechnen**. Mit ihrer Hilfe lassen sich nämlich Rechnungen vereinfachen:

Beispiele:

- $51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \bullet 50 + 1^1 = 2.500 + 100 + 1 = 2.601$
- $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \bullet 100 + 1^2 = 10.000 - 200 + 1 = 9.801$
- $65^2 = (60 + 5)^2 = 60^2 + 10 \bullet 60 + 5^2 = 3.600 + 600 + 25 = 4.225$
- $98 \bullet 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10.000 - 4 = 9.996$

Viel wichtiger ist aber folgendes:

In Umkehrung der binomischen Formeln lassen sich auch oft **Summen und Differenzen als Produkte** darstellen. Dies ist z.B. dann sinnvoll, wenn die Nullstellen einer Funktion gesucht werden sollen oder um Brüche zu kürzen.

Beispiele:

- $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$
- $49x^2 - 42x + 9 = (7x - 3)^2$
- $25x^2 - 1 = (5x + 1) \bullet (5x - 1)$
- $\dfrac{16x^2 - 1}{4x+1} = \dfrac{(4x+1)(4x-1)}{4x+1} = 4x - 1$
- $\dfrac{9x^2 + 12xy + 4y^2}{6x+4y} = \dfrac{(3x+2y)^2}{2(3x+2y)} = \dfrac{3x+2y}{2} = 1{,}5x + y$

Binome höherer Ordnung

Nun gibt es auch andere Potenzen als nur das Quadrat. Ein paar **Beispiele:**

- $(a + b)^0 = 1$
- $(a + b)^1 = a + b$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \bullet (a + b) =$
  $= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a + b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2) \bullet (a^2 + 2ab + b^2) =$
  $= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 =$
  $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Sie sehen: Je höher die Potenz des Binoms, desto aufwendiger die Berechnung. Einfacher geht es mit dem **Pascal' schen Dreieck**. Dieses Dreieck erhält man, indem man die Koeffizienten der Binome aufschreibt. Alternativ kann man die Elemente auch berechnen:

- Am Anfang und am Ende jeder Reihe steht der Koeffizient 1.
- Die Koeffizienten der nächsten Reihe entstehen immer durch Addition der Koeffizienten der darüber liegenden Reihe.

$(a+b)^0$	1							
$(a+b)^1$	1	1						
$(a+b)^2$	1	2	1					
$(a+b)^3$	1	3	3	1				
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1			
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1		
$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	6		
$(a+b)^7$	1	7	21	35	35	21	7	

Vergleichen Sie nun die Koeffizienten mit den Berechnungen der Binome höherer Ordnung. Ihnen sollte folgendes auffallen:

- Die Koeffizienten der Lösung gibt das Pascal' sche Dreieck vor.
- Die Exponenten von a verlaufen fallend, die von b steigend.
- Bei jedem Summanden ist die Summe der Exponenten von a und b = n.

Weiterhin gilt:

- Ist ein Term (a oder b) negativ, richtet sich das Vorzeichen nach der Potenz dieses „Buchstaben“ im Ergebnisterm. Ist die Potenz ungerade, ist der Ausdruck negativ, ist er gerade, ist der Ausdruck positiv.
- Sind a und b beide negativ, richtet sich das Vorzeichen des Ergebnistermes nach der Summe der Exponenten. Ist sie ungerade, ist der Ausdruck negativ, ist sie gerade, ist der Ausdruck positiv.
  Da die Summe der Exponenten aber gerade auch n entspricht, gilt: Ist n ungerade, sind alle Ausdrücke negativ, ist n gerade, sind sie positiv.

Auf diese Weise kann man alle höheren Binome lösen. **Beispiele:**

- $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15\ a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(-a -b)^3 = -a^3 -3a^2b -3ab^2 - b^3$
- $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
- $(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

Aufgaben zu den binomischen Formeln:

Aufgaben 39 - 63

Rechnen mit Potenzen

Definition:

Potenzen mit natürlichen Exponenten treten z.B. auf bei Flächen- oder Volumenmaßen: cm^2 oder m^3.

Will man beispielsweise das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a berechnen, erhält man nach der Volumenformel Höhe • Breite • Länge
$V = a \bullet a \bullet a = a^3$

Ein Würfel mit der Kante 2 cm hat beispielsweise ein Volumen von
$2 \bullet 2 \bullet 2 = 2^3 = 8\ cm^3$.

In der Mathematik heißt diese abgekürzte Multiplikation eine Potenz:

$$\underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \cdots \bullet a \bullet a}_{n\ \text{Faktoren}} = \underbrace{a}_{\text{Basis}}{}^{n \leftarrow \text{Exponent}}$$

Beispiel: x^2 ist also eine Potenz mit der Basis x und dem Exponenten 2.

Spezialfälle:

- $a^1 = a$ Der Exponent 1 wird normalerweise nicht geschrieben.
- $a^0 = 1$ Jede beliebige Zahl hoch Null ist 1.

Brüche:

Regel: Steht als Basis ein Bruch, können Zähler und Nenner getrennt betrachtet werden.

Es gilt: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \bullet \frac{a}{b} \bullet \frac{a}{b} = \frac{a \bullet a \bullet a}{b \bullet b \bullet b} = \frac{a^3}{b^3}$

Beispiele:

- $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2^2} = \frac{x^2}{4}$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Klammersetzung:

Klammern sind bei Potenzen sehr wichtig.

Beispiel 1: $(cd)^3$ ist nicht dasselbe wie cd^3:

- $(cd)^3 = cd \bullet cd \bullet cd = c \bullet c \bullet c \bullet d \bullet d \bullet d = c^3d^3$
- $cd^3 = c \bullet d \bullet d \bullet d$

Beispiel 2: $\left(2^2\right)^3$ ist nicht dasselbe wie $(2)^{2^3}$

- $\left(2^2\right)^3 = (2 \bullet 2)^3 = 4^3 = 4 \bullet 4 \bullet 4 = 64$
- $2^{\left(2^3\right)} = 2^{(2 \bullet 2 \bullet 2)} = 2^8 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 = 256$

Vorzeichen:

Die Vorzeichenregel lautet: $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{wenn n eine gerade Zahl ist} \\ -1 & \text{wenn n eine ungerade Zahl ist} \end{cases}$

Und daraus abgeleitet:

$$(-a)^n = \left((-1) \bullet a\right)^n = (-1)^n \bullet a^n = \begin{cases} a^n & \text{wenn n eine gerade Zahl ist} \\ -\left(a^n\right) & \text{wenn n eine ungerade Zahl ist} \end{cases}$$

Addition und Subtraktion von Potenzen:

Potenzen kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie sowohl in der Basis als auch im Exponenten übereinstimmen.

Beispiel: $2x^2 + x^3 + 4x + 3x^2 - x + 2x^3 =$

$= 2x^2 + 3x^2 + 4x - x + x^3 + 2x^3 =$

$= 5x^2 + 3x + 3x^3$

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis:

Herleitung: $a^3 \bullet a^4 = (a \bullet a \bullet a) \bullet (a \bullet a \bullet a \bullet a) = a^7 = a^{3+4}$

Regel: Potenzen mit gleicher Basis werden also multipliziert, indem man die Exponenten addiert. Die Basis bleibt dabei unverändert.

Formel: $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

Beispiele: $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

$a^4 \bullet a^{-2} = a^{4+(-2)} = a^2$

Division von Potenzen mit gleicher Basis:

Herleitung: $a^5 : a^2 = \dfrac{\cancel{a} \bullet \cancel{a} \bullet a \bullet a \bullet a}{\cancel{a} \bullet \cancel{a}} = a^3 = a^{5-2}$

Regel: Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert. Die Basis bleibt dabei unverändert.

Formel: $\boxed{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$

Beispiele: $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

$\dfrac{x^4 y}{x^2} = x^{4-2} y = x^2 y$

Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten:

Herleitung: $a^4 \bullet b^4 = a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet b \bullet b \bullet b \bullet b =$
$= (a \bullet b) \bullet (a \bullet b) \bullet (a \bullet b) \bullet (a \bullet b) = (a \bullet b)^4 = (ab)^4$

Regel: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, in dem man die Basen multipliziert . Der Exponent bleibt dabei unverändert.

Formel: $\boxed{a^n \bullet b^n = (ab)^n}$

Beispiele: $x^2 \bullet 5^2 = (5x)^2$

$(3a)^3 = 3^3 \bullet a^3 \bullet 27a^3$

Division von Potenzen mit gleichen Exponenten:

Herleitung:. $\frac{a^4}{b^4} = \frac{a \bullet a \bullet a \bullet a}{b \bullet b \bullet b \bullet b} = \left(\frac{a}{b}\right) \bullet \left(\frac{a}{b}\right) \bullet \left(\frac{a}{b}\right) \bullet \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^4$

Regel: Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, in dem man die Basen dividiert. Der Exponent bleibt dabei unverändert.

Formel: $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{mit} \quad b \neq 0}$

Beispiele: $3^2 : z^2 = \left(\frac{3}{z}\right)^2 \qquad z \neq 0$

$(ax)^3 : (xy)^3 = \left(\frac{ax}{xy}\right)^3 = \left(\frac{a}{y}\right)^3$

Achtung:

Stimmen weder die Basis noch die Exponenten überein, ist ein Zusammenfassen nicht möglich!

Beispiele:

- $a^4 \bullet b^3 = a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet b \bullet b \bullet b$
- $2x^3 \bullet 3y^2 = 6x^3y^2$

Potenzieren von Potenzen:

Herleitung: $(a^3)^2 = (a \bullet a \bullet a)^2 = a^3 \bullet a^3 = a^{3 \bullet 2} = a^6$

Regel: Eine Potenz wird potenziert, in dem der eine Exponent mit dem anderen Exponenten multipliziert wird.

Formel: $\boxed{(a^n)^m = a^{n \bullet m}}$

Beispiele: $(x^2)^3 = x^{2 \bullet 3} = x^6$

$(a^3)^x = a^{3 \bullet x} = a^{3x}$

Achtung: Klammersetzung beachten!

$a^{(2^3)} = a^{2 \bullet 2 \bullet 2} = a^8 \qquad (a^2)^3 = a^{2 \bullet 3} = a^6$

Negative Exponenten:

Regel: Ein negativer Exponent wird positiv, wenn man den Kehrwert des ganzen Ausdruckes bildet.

Formeln:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^n}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = 1 \bullet \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$$

Beispiele:

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{3}{x^{-3}} = 3x^3$$

$$\left(\frac{1}{c}\right)^{-3} = c^3$$

$$2\frac{u^{-2}}{v} = \frac{2}{u^2 v}$$

Aufgaben zur Potenzrechnung:

Aufgaben 64 – 83

Rechnen mit Wurzeln

Definitionen:

Wurzeln treten z.B. bei der Umkehrung von Flächen- oder Volumenaufgaben auf:

- Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 5 cm^2 hat eine Seitenlänge von $a = \sqrt{5}\,\text{cm}$.
- Ein Würfel mit dem Volumen 7 m^3 hat eine Kantenlänge von $a = \sqrt[3]{7}\ \text{m}$.

Begriffe:

$\sqrt[3]{x}$ ist die 3. Wurzel aus x, dabei ist x der **Radikant** und 3 der **Wurzelexponent**.

Achtung: Wenn man eine Wurzel ohne Wurzelexponenten schreibt, so handelt es sich dabei immer um die zweite Wurzel. ($\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$)

Definitionsbereich des Radikanten:

Für $\sqrt[n]{a}$ gilt:

- Ist der Wurzelexponent n gerade, muss der Radikant a größer oder gleich Null sein. Eine solche Aufgabe hat dann zwei Lösungen.
- Ist der Wurzelexponent n ungerade, dürfen in der Wurzel auch negative Zahlen a stehen. Hier gibt es immer nur eine eindeutige Lösung.

Beispiele:

- $\sqrt{64} = 8$
- $\sqrt[4]{16} = 2$
- $\sqrt{-16}$ ist nicht definiert, denn jede Zahl hoch 2 ist positiv.
- $\sqrt[3]{-27} = -3$, denn $(-3)^3 = -27$
- $\sqrt[5]{1} = 1$ aber $\sqrt[5]{-1} = -1$

Wurzeln als gebrochen rationale Potenzen:

Wenn man von der Gleichung $x^m = b$ ausgeht, kann man für die Auflösung nach x nun entweder auf beiden Seiten die m-te Wurzel ziehen, oder aber nach den Potenzgesetzen mit $\frac{1}{m}$ potenzieren:

- $x^m = b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[m]{x^m} = \sqrt[m]{b} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[m]{b}$
- $x^m = b \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^m\right)^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{m}} \quad \Leftrightarrow \quad x = b^{\frac{1}{m}}$

Vergleicht man die Ergebnisse, sieht man: $x = x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[m]{b} = b^{\frac{1}{m}}$

Man kann also jede Wurzel in eine (gebrochen rationale) Potenz umwandeln und umgekehrt.

Es gilt: $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$

Beispiele:

- $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$
- $\sqrt{a^y} = a^{\frac{y}{2}}$
- $x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x^5}$
- $x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
- $\dfrac{1}{x^{-\frac{a}{b}}} = x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

Rechenregeln für Wurzeln:

Da, wie gezeigt, alle Wurzeln auch (gebrochen rationale) Potenzen anwendbar sind, finden alle Regeln für Potenzen auch auf Wurzeln Anwendung.

Im folgenden sind die Formeln für Wurzeln jeweils mit einem oder mehreren Beispielen aufgeführt:

Potenzieren und Radizieren heben sich bei gleichem Exponenten n auf.

Beispiele: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\quad\sqrt[4]{a^4} = a$

Bei **Strichrechnung** ist ein Zusammenfassen nur möglich, wenn sowohl der Radikant als auch die Basis übereinstimmen. Das Zusammenfassen erfolgt nach der gleichen Regel wie $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$.

Formel: $\boxed{\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}}$

Beispiele:
- $\sqrt{4+25} = \sqrt{29} = 5{,}385 \neq \sqrt{4} + \sqrt{25} = 2+5=7$
- $\sqrt{2} + \sqrt{2} \neq \sqrt{2+2} = \sqrt{4}$ $\quad\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \bullet \sqrt{2} = 2{,}82$ $\quad\sqrt{4=2}$

Multiplikation bei gleichem (Wurzel-) Exponenten:

Bei gleichem Wurzelexponenten werden nur die Radikanten multipliziert, der Exponent bleibt gleich.

Formel: $\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$

Beispiele:
- $\sqrt{x} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5x}$
- $\sqrt{32} = \sqrt{2 \bullet 16} = \sqrt{2} \bullet \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[4]{a^4 \bullet a^2} = \sqrt[4]{a^4} \bullet \sqrt[4]{a^2} = a \bullet \sqrt[4]{a^2}$
  Rechnet man hier mit gebrochenen Exponenten, kann man die Lösung noch weiter vereinfachen:
  $\sqrt[4]{a^6} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{3}{2}} = a^{1\frac{1}{2}} = a^1 \bullet a^{\frac{1}{2}} = a \bullet \sqrt{a}$

Division bei gleichem (Wurzel-) Exponenten:

Bei gleichem Wurzelexponenten werden nur die Radikanten dividiert, der Exponent bleibt gleich.

Formel: $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

Beispiele:

- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{z}} = \sqrt[2]{\dfrac{3}{z}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Multiplikation bei gleichem Radikanten:

Bei gleichem Radikanten werden nur die Wurzelexponenten addiert, der Radikant bleibt gleich.

Formel: $\boxed{\sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[m]{a} = \sqrt[n+m]{a}}$

Beispiele:

- $\sqrt{x} \bullet \sqrt[3]{x} = \sqrt[2+3]{x} = \sqrt[5]{x}$
- $\sqrt[5]{(a+b)^2} \bullet \sqrt{(a+b)} = (a+b)^{\frac{2}{5}} \bullet (a+b)^{\frac{1}{2}} =$
  $= (a+b)^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}} = (a+b)^{\frac{4+5}{10}} = (a+b)^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{(a+b)^9}$

Division bei gleichem Radikanten:

Bei gleichem Radikanten werden nur die Wurzelexponenten subtrahiert, der Radikant bleibt gleich.

Formel: $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n-m]{a}}$

Beispiele:

- $\dfrac{\sqrt[5]{27}}{\sqrt{27}} = \sqrt[5-2]{27} = \sqrt[3]{27} = 3$
- $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a}} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{6}{4}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5} = a\sqrt[4]{a}$

Verschachtelung mehrerer Wurzeln:

Sind mehrere Wurzeln ineinander verschachtelt, werden die Wurzelexponenten miteinander multipliziert.

Formel: $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \bullet m]{a}}$

Beispiele:

- $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3 \bullet 2]{x} = \sqrt[6]{x}$

- $\sqrt{2 \bullet \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{2 \bullet a^{\frac{2}{3}}} = \left(2 \bullet a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \bullet a^{\frac{2}{3} \bullet \frac{1}{2}} =$

  $= 2^{\frac{1}{2}} \bullet a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2} \bullet \sqrt[3]{a} = 1{,}41 \bullet \sqrt[3]{a}$

Aufgaben zu Wurzeln:

Aufgaben 84 – 98

Rechnen mit Logarithmen

Einführung:

Eine ganz banale Frage:
Welches ist die Hochzahl von 2^3 , wenn 2 die Basis ist ?
Die Antwort ist ablesbar: Die Hochzahl, oder auch Exponent genannt, ist 3.

Nun eine neue Frage: Welches ist die Hochzahl von 8 , wenn 2 die Basis ist ?
Die Antwort ist dieselbe, nämlich 3, aber dazu muss man erst 8 als 2^3 identifizieren. Jetzt nennt man aber 3 nicht mehr den Exponenten, sondern den Logarithmus.

Dies ist verwirrend, daher die genaue Erklärung:

Es gilt bekanntlich $2^3 = 8$.

- 3 ist der Exponent von 2 für das Ergebnis 8.
- 3 ist der Logarithmus von 8 zur Basis 2.

Man muss also unterscheiden:

- Geht man von 2 aus, dann ist 3 der Exponent von 3,
- geht man vom Ergebnis 8 aus, dann ist 3 der Logarithmus.

Allgemein gilt:
Aus $\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Ergebnis}$ folgt $\log_{\text{Basis}} \text{Ergebnis} = \text{Exponent}$

Beispiele:

- $2^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 8 = 3$
- $2^4 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 16 = 4$
- $4^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \log_4 16 = 2$
- $5^3 = 125 \quad \Leftrightarrow \quad \log_5 125 = 3$
- $3^{-2} = \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 \frac{1}{9} = -2$
- $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$
- $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

Berechnen von Logarithmen

Bisher haben wir noch keine Logarithmen berechnet, sondern nur das Umschreiben einer Potenzgleichung in eine Logarithmusgleichung geübt.

Nun wollen wir die Logarithmen dadurch bestimmen, daß wir die Potenzrechnung zuerst ausführen.

Es gilt: Die Potenzgleichung $a^x = b$ hat genau eine Lösung: $x = \log_a b$, also der Logarithmus von b zur Basis a.

Um den Wert des Logarithmus $x = \log_a b$ zu bestimmen, ist die Fragestellung: a hoch wieviel ist b?

Beispiele:

- $x = \log_2 32$
  Frage: 2 hoch wieviel ist 32 ?
  Lösung: $\log_2 32 = 5$ (denn $2^5 = 32$)
- $x = \log_4 64$
  Frage: 4 hoch wieviel ist 64 ?
  Lösung: $\log_4 64 = 3$ (denn $4^3 = 64$)
- $x = \log_9 81$
  Frage: 9 hoch wieviel ist 81 ?
  Lösung: $\log_9 81 = 2$ (denn $9^2 = 81$)

Dieser Rechenweg noch einmal anders:

- Wenn also nun nach $x = \log_2 64$ gefragt ist, müssen wir erkennen, daß in der zugehörigen Potenzgleichung 2 die Basis ist und 64 das Ergebnis. Der gesuchte Logarithmus ist die dazugehörige Hochzahl zur Basis 2.
- Wir müssen erkennen daß $64 = 2^6$ ist.
- Die Rechnung lautet also: $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$
  Man ersetzt also 64 durch 2^6 und liest das Ergebnis, also die Hochzahl, einfach ab.

Beispiele:

- $\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 \frac{1}{7^2} = \log_7 7^{-2} = -2$
- $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
- $\log_2\left(4\sqrt{2}\right) = \log_2\left(2^2 \bullet 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2\left(2^{2+\frac{1}{2}}\right) = \log_2\left(2^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2}$

Besondere Basen:

Grundsätzlich lassen sich alle positiven Zahlen außer der 1 als Basis verwenden. (Bei 1 haben alle Logarithmusfunktionen eine Nullstelle und steigen dann streng monoton steigend an.) Üblich sind aber die beiden folgenden Basen:

1. **Zehnerlogarithmen**, auch **dekadische Logarithmen** genannt, haben die Basis a = 10. Wenn nur „log“ ohne Angabe einer Basis oder auch „lg“ geschrieben wird, ist immer die Basis 10 gemeint.

   Beispiele:
   - $\log_{10}100 = 2$ (denn $10^2 = 100$)
   - $\log 10.000 = 4$ (denn $10^4 = 10.000$)
   - $\lg 0{,}01 = -2$ (denn $10^{-2} = 1/10^2 = 0{,}01$)

   Bitte merken: $\lg 10 = 1$

2. **Natürliche Logarithmen** haben die Basis e. e ist die sog. Euler’sche Zahl mit e = 2,71828. . ., die bei Naturprozessen mit stetigem Wachstum eine große Rolle spielt. Solche natürlichen Logarithmen werden oft mit „ln“ für „logarithmus naturalis“ bezeichnet: $\log_e x = \ln x$.
   Bitte merken: $\ln e = 1$

Diese beiden Logarithmenarten findet man gewöhnlich auf jedem Taschenrechner.

Aus weitere Sonderform wird manchmal noch der **Zweierlogarithmus** oder **binäre Logarithmus** bezeichnet, d.h. ein Logarithmus zur Basis 2, also $\log_2$. Dieser Logarithmus spielt in der EDV eine wichtige Rolle.

Zusammengesetzte Logarithmen

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Gesetze:

$\log_a 1 = 0 \quad$ denn $\quad a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\ln 4 + \ln 3 = \ln(3 \cdot 4) = \ln 12 = 2{,}4849$

$\log_3(27 \bullet 81) = \log_3 27 + \log_3 81 = 3 + 4 = 7$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\lg 5 - \lg 3 = \lg\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}2218$

$\ln\frac{x \bullet y}{z} = \ln x + \ln y - \ln z$

$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$

$\lg 10^{20} = 20 \bullet \lg 10 = 20$

$\log_2(4^8) = 8 \bullet \log_2 4 = 8 \bullet 2 = 16$

$\ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$

$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

$\log_2 \frac{1}{16} = -\log_2 16 = -\log_2 2^4 = -4$

Achtung: Diese Formeln finden nur Anwendung, wenn die Logarithmen die gleiche Basis haben.

Eine weitere Rechenregel erlaubt das **Berechnen jedes beliebigen Logarithmus mit dem Taschenrechner**:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Beispiel 1: Man berechne $\log_{0,5} 5$:

1. Möglichkeit: $\log_{0,5} 5 = \frac{\lg 5}{\lg 0,5} = \frac{0,6990}{-0,3010} = -2,3219$

2. Möglichkeit: $\log_{0,5} 5 = \frac{\ln 5}{\ln 0,5} = \frac{1,6094}{-0,6931} = -2,3219$

Beispiel 2: Man berechne $\log_{4,7} 31$:

1. Möglichkeit: $\log_{4,7} 31 = \frac{\lg 31}{\lg 4,7} = \frac{1,4914}{0,6721} = 2,2190$

2. Möglichkeit: $\log_{4,7} 31 = \frac{\ln 31}{\ln 4,7} = \frac{3,4340}{1,5476} = 2,2190$

Aufgaben zu Logarithmen
Aufgaben 99 – 122

Summen- und Produktzeichenzeichen

Definition:

Das Summenzeichen Σ (großer griechischer Buchstabe Sigma) dient der vereinfachenden und verkürzten Schreibweise von Summen. Sie werden es vor allem in Statistik benötigen.

Es gilt: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Gesprochen heißt das: Die Summe über alle a_i von i = 1 bis i = n, wobei 1 die untere Grenze und n die obere Grenze ist.

Beispiel:

$a_1 = 4 \quad a_2 = 7 \quad a_3 = 12 \quad a_4 = 18$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 4 + 7 + 12 + 18 = 41$$

Eine größere Bedeutung hat das Summenzeichen dann, wenn es möglich ist, a_i als Funktion des Summationsindexes i darzustellen.

Die hinter dem Summenzeichen stehende Rechenoperation wird dann beginnend mit der unteren Grenze bis zur oberen Grenze fortlaufend ausgeführt.

Beispiele:

1. $\sum_{i=-3}^{1} i = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$
2. $\sum_{i=-2}^{3} (4i + 2) = (-6) + (-2) + 2 + 6 + 10 + 14 = 24$
3. $\sum_{i=1}^{3} (i^2 - 2i) = (1^2 - 2 \cdot 1) + (2^2 - 2 \cdot 2) + (3^2 - 2 \cdot 3) = (-1) + 0 + 3 = 2$
4. $\sum_{i=1}^{3} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6+8+9}{12} = \frac{23}{12}$

Wie Sie sehen, muß die untere Grenze nicht gleich 1 sein, sondern kann jeden beliebigen Wert einnehmen.

Regeln zum Rechnen mit Summenzeichen:

Wenn die Summe aus n gleichen Summanden a besteht, lässt sie sich dadurch berechnen, daß man n mit a multipliziert.

$$\sum_{i=1}^{n} a = n \bullet a$$

Beispiele:

1. $\sum_{i=1}^{3} 15 = 15 + 15 + 15 = 3 \bullet 15 = 45$

2. $\sum_{i=1}^{5} xy = xy + xy + xy + xy + xy = 5 \bullet xy = 5xy$

Wenn jedes Glied einer Summe einen konstanten Faktor enthält, kann dieser Faktor vor das Summenzeichen gezogen werden:

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Beispiele:

1. $\sum_{i=0}^{2} \left(3 \cdot i^3\right) = 3 \cdot \sum_{i=0}^{2} i^3 = 3\left(0^3 + 1^3 + 2^3\right) = 3 \bullet 9 = 27$

2.

$$\sum_{i=-2}^{2} \left(4xi^2\right) = 4x \cdot \sum_{i=0}^{2} i^2 = 4x\left((-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2\right) =$$
$$= 4x\left(4 + 1 + 0 + 1 + 4\right) = 4x \bullet 10 = 40x$$

3.

$$\sum_{i=1}^{3} \left(5 \cdot \frac{6i}{2^i - 1}\right) = 5 \cdot \sum_{i=0}^{2} \frac{6i}{2^i - 1} = 5\left(\frac{6}{1} + \frac{12}{3} + \frac{18}{7}\right) =$$
$$= 5\left(\frac{126 + 84 + 54}{21}\right) = 5 \bullet \frac{264}{21} = \frac{1.320}{21} = 62{,}857$$

Wenn jedes Glied einer Summe aus mehreren Summanden besteht, kann die Summe für jeden Summanden getrennt berechnet werden:

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$$

Beispiele:

1. $\sum_{i=1}^{4}\left(i^2+3i\right) = \sum_{i=1}^{4} i^2 + \sum_{i=1}^{4} 3i = (1+4+9+16)+(3+6+9+12) = 30+30 = 60$

2. $\sum_{i=1}^{3}\left(3i-\frac{1}{i^2}\right) = \sum_{i=1}^{3} 3i - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i^2} = (3+6+9)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right) = 18-\frac{36+9+4}{36} = 18-\frac{49}{36} = 16{,}83\overline{8}$

Diese Regeln können natürlich auch kombiniert werden.

Beispiele:

1. $\sum_{i=1}^{5}(2a_i - 3b_i + 4c_i - 5d_i) = 2 \bullet \sum_{i=1}^{5} a_i - 3 \bullet \sum_{i=1}^{4} b_i + 4 \bullet \sum_{i=1}^{5} c_i - 5 \bullet \sum_{i=1}^{4} d_i$

2.

$$\sum_{i=1}^{5}\left(2i+3-\frac{4}{i}\right) = \left(2 \bullet \sum_{i=1}^{5} i\right) + (5 \bullet 3) - \left(4 \bullet \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{i}\right) =$$

$$= 2(1+2+3+4+5)+15-4\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) =$$

$$2 \bullet 15 + 15 - 4 \bullet \frac{137}{60} = 45 - \frac{137}{15} = \frac{538}{15} = 35{,}8\overline{6}$$

Doppelsummen

Im Laufe Ihres Wirtschaftsstudiums werden Sie häufig mit Tabellen konfrontiert werden.

Beispiel:

Ein Unternehmen produziert drei verschiedene Farbfernsehgeräte. Die nachfolgende Tabelle gibt die Umsätze (in Mio. €) für die ersten 6 Monate dieses Jahres pro Produktvariante wieder):

Produkt	Monate j						Gesamtumsatz je Produkt
i	1	2	3	4	5	6	
1	2	5	4	6	2	3	22
2	4	6	8	3	4	5	30
3	3	2	5	5	3	2	20
monatlicher Gesamtumsatz	9	13	17	14	9	10	72

Allgemeine Symbole für dieses Beispiel:
u_{ij} ist der Umsatz des Gutes i im Monat j (zuerst Zeile, dann Spalte).
Beispiel: $u_{24} = 3$

Die erste Zeilensumme ergibt sich aus:

$$\sum_{j=1}^{6} u_{1j} = u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} = 2+5+4+6+2+3 = 22$$

Die erste Spaltensumme ergibt sich aus: $\sum_{i=1}^{3} u_{i1} = u_{11} + u_{21} + u_{31} = 2+4+3 = 9$

Die gesamte Umsatzsumme ergibt sich nun als Doppelsumme:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6} u_{ij} = (u_{11}+u_{21}+u_{31}) + (u_{12}+u_{22}+u_{32}) + (u_{13}+u_{23}+u_{33}) + \cdots = 72$$

Beispiele:

1. $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{6} a_{ij} = (a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}) + (a_{23}+a_{24}+a_{25}+a_{26}) + (a_{33}+a_{34}+a_{35}+a_{36})$$

2. $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} i \bullet j^2 = (1\bullet 1^2 + 2\bullet 1^2 + 3\bullet 1^2) + (1\bullet 2^2 + 2\bullet 2^2 + 3\bullet 2^2) = 1+2+3+4+8+12 = 20$$

3. $$\sum_{i=-1}^{2}\sum_{j=1}^{4} 2i \bullet j = (-2\bullet 1 + -2\bullet 2 + -2\bullet 3 + -2\bullet 4) + (0\bullet 1 + 0\bullet 2 + 0\bullet 3 + 0\bullet 4) +$$
$$+ (2\bullet 1 + 2\bullet 2 + 2\bullet 3 + 2\bullet 4) + (4\bullet 1 + 4\bullet 2 + 4\bullet 3 + 4\bullet 4) =$$
$$= -2(1+2+3+4) + 0 + 2(1+2+3+4) + 4(1+2+3+4) = 4\bullet 10 = 40$$

Das Produktzeichen

Analog zum Summenzeichen gibt es auch ein Produktzeichen. Es gilt:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \bullet a_2 \bullet a_3 \bullet a_4 \bullet \cdots \bullet a_n$$

Beispiele:

1. $\prod_{i=1}^{9} i = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 6 \bullet 7 \bullet 8 \bullet 9 = 362.880$

2. $\prod_{i=1}^{9} \frac{i}{1+i} = \frac{1}{\cancel{2}} \bullet \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \bullet \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \bullet \cdots \bullet \frac{\cancel{99}}{\cancel{100}} \bullet \frac{\cancel{100}}{101} = \frac{1}{101}$

3. $\prod_{i=20}^{30} \frac{(i+1)(i-1)}{i^2-1} = \prod_{i=20}^{30} \frac{i^2-1}{i^2-1} = \prod_{i=20}^{30} 1 = 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet \cdots \bullet 1 = 1$

Aufgaben zu Summen- und Produktzeichen:
Aufgaben 123 – 133

Lösen von linearen Gleichungen

Rechnen mit Gleichungen und Ungleichungen: Äquivalenzumformungen

- Alle Rechenschritte müssen immer auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt werden. Dadurch bleibt die Gleichung in ihrem Wert unverändert, es wird äquivalent umgeformt. Das verdeutlicht das Zeichen $\Leftrightarrow$ das vor die „modifizierte" Zeile gesetzt wird.
- Erlaubte Rechenoperationen:
  - Addition oder Subtraktion eines Terms.
  - Multiplikation oder Division mit einem Term $\neq 0$.
  - Potenzieren, Wurzelziehen oder Logarithmieren

- **Beispiele:**

$$x - 10 = 4 \quad \Big| \quad +10$$
$$\Leftrightarrow x - 10 + 10 = 4 + 10$$
$$\Leftrightarrow x = 14$$

$$\frac{x}{4} = 8 \quad \Big| \quad \bullet 4$$
$$x = 32$$

$$4x = 20 \quad \Big| \quad :4$$
$$\Leftrightarrow 4x : 4 = 20 : 4$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$x^2 = 49 \quad \Big| \quad \sqrt{(\quad)}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 7 \qquad x_2 = -7$$

In der Regel muß man mehrere dieser äquivalenten Umformungen vornehmen, um die Gleichung in die angestrebte Form „x = . . ." zu bringen.

Beispiele:

$3x + 7 = 19 \qquad x = 4$

$7x - 5 = 3x + 17 \qquad x = 5{,}5$

Einfache lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen enthalten nur Unbekannte in der ersten Potenz.
Beispiele:
$3x = 17$ $4x + 2y = -5$ $5 - 3z + 7y = 3x$

Ist in einer Gleichung nur eine Unbekannte (z.B. x) enthalten, so ergibt sich die Lösung durch Auflösen der Gleichung nach x .

Beispiel 1:

$$126 + 5x = 14 + 3x \quad \Big| \quad -3x$$

$$\Leftrightarrow 126 + 2x = 14 \quad \Big| \quad -126$$

$$\Leftrightarrow 2x = 112 \quad \Big| \quad :2$$

$$\Leftrightarrow x = 56$$

Beispiel 2:
$-3 + 12x = 7 \quad \mathrm{I} \quad +3$

$12x = 10 \quad \mathrm{I} \quad :12$
$x = 0{,}833$

Beispiel 3:
$(2x + 7) - (3x - 3) = (5x + 4) \bullet 3$

$2x + 7 - 3x + 3 = 15x + 12$
$10 - x = 15x + 12 \quad \mathrm{I} \quad -10$
$-x = 15x + 2 \quad \mathrm{I} \quad -15x$
$-16x = 2 \quad \mathrm{I} \quad :-16$
$x = -\dfrac{1}{8}$

Textgleichungen

Textaufgaben sind in der Schule besonders „beliebt“. Sie lassen sich in aller Regel auf lineare Gleichungen zurückführen.

Beispiel 1:
Die Differenz aus dem Achtfachen und dem Fünffachen meines Alters ist 96. Wie alt bin ich?

$8x - 5x = 96$ $3\,x = 96$ $x = 32$ (schön wär’s!)

Beispiel 2:
Jürgen hat doppelt so viele Kekse gegessen wie Astrid. Zusammen haben sie zwei schachteln zu je 24 Stück verschlungen. Wie viele Kekse hat dann jeder gegessen?

Astrid: x Jürgen: 2x $x + 2x = 2 \bullet 24$ $x = 16$ (Astrid) Jürgen: $2x = 32$

Beispiel 3:
Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 336. Wie heißen diese drei Zahlen?

Wenn man die kleinste gesuchte Zahl als x bezeichnet, sind die andern Zahlen (x + 1) und (x + 2).
Es gilt also: $x + (x + 1) + (x + 2) = 336$
$x = 111$
Die gesuchten Zahlen sind 111, 112 und 113.

Bruchgleichungen

Ist die Unbekannte einer Gleichung in einem Bruch enthalten, multipliziert man die Gleichung mit den Nennern, um die Brüche aufzulösen.

Achtung: Der Nenner eines Bruches darf nicht Null werden!

Beispiel 1:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \quad |\bullet 6$$

$$4x + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2:

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{x-6}{6} = \frac{1}{2}x \quad |\bullet 30\,(\text{Hauptnenner})$$

$$\frac{(2x-3)\bullet 30}{5} - \frac{(x-6)\bullet 30}{6} = \frac{30x}{2}$$

$$12x - 18 - 5x + 30 = 15x$$

$$-8x = -12$$

$$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Beispiel 3:

$$\frac{3x-7}{x-4}=\frac{3x-19}{x+7} \quad \Big| \quad \cdot(x-4)$$

$$\frac{(3x-7)\cdot(x-4)}{(x-4)}=\frac{(3x-19)\cdot(x-4)}{(x+7)} \quad \Big| \quad \cdot(x+7)$$

$$(3x-7)\cdot(x+7)=\frac{(3x-19)\cdot(x-4)\cdot(x+7)}{(x+7)}$$

$$3x^2+21x-7x-49=3x^2-12x-19x+76$$

$$14x-49=-31x+76$$

$$45x=125$$

$$x=\frac{125}{45}$$

$$x=\frac{25}{9}$$

Beispiel 4:

$$\frac{2x+3}{6x+5}=\frac{2x-7}{6x-21} \quad \Big| \quad \bullet(6x+5) \quad ; \quad \bullet(6x-21)$$

$$(2x+3)\bullet(6x-21)=(2x-7)(6x+5)$$

$$12x^2-42x+18x-63=12x^2+10x-42x-35 \quad \Big| -12x^2$$

$$-24x-63=-32x-35 \quad \Big| \quad +32x \quad ; \quad +63$$

$$8x=28 \quad \Big| \quad :8$$

$$x=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}$$

Das ist trotzdem keine gültige Lösung der Gleichung, denn setzt man das Ergebnis in den 2. Nenner ein, wird er Null.

Also: Keine Lösung!

Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen beinhalten die Unbekannte x im Exponenten. Davon gibt es mehrere Arten: direkt lösbare Exponentialgleichungen und nicht direkt lösbare Exponentialgleichungen.

Auf beide Arten gehe ich in Folge ein, auch wenn sie für ihr weiteres Studium nicht so ganz wichtig sind. Sie bieten aber eine gute Möglichkeit, die Logarithmenrechnung wenigstens ansatzweise zu wiederholen.

1. Direkt lösbare Exponentialgleichungen

Beispiel 1: $8^x = 32$

Da beide Seiten Potenzen derselben Basis 2 sind, rechnet man beide Seiten in Potenzen von 2 um und erhält:

$$\left(2^3\right)^x = 2^5 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^{3x} = 2^5$$

Potenzen mit gleicher Basis sind genau dann gleich, wenn auch die Exponenten gleich sind. Also gilt:

$$3x = 5 \qquad x = \frac{5}{3}$$

Beispiel 2:

$$\left(3^2\right)^{x+1} = 3^{\frac{1}{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3^{2x+2} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 2x+2 = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x = -\frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{3}{4}$$

2. Nicht direkt lösbare Exponentialgleichungen

Beispiel 1: $2^x = 7$

Da man nun die beiden Seiten der Gleichung nicht als Potenz derselben Basis darstellen kann, muß man diese Gleichung logarithmieren. Damit man den Taschenrechner verwenden kann, nimmt man dazu i.d.R. den Zehnerlogarithmus:

$$2^x = 7 \quad \Big| \quad \lg(\ )$$

$$\lg\left(2^x\right) = \lg(7)$$

$$x \bullet \lg(2) = \lg(7)$$

$$x = \frac{\lg 7}{\lg 2} = 2{,}807$$

Beispiel 2:

$$7^{x+1} = 11 \quad \Big| \quad \lg(\ )$$

$$\lg\left(7^{x+1}\right) = \lg(11)$$

$$(x+1) \bullet \lg(7) = \lg(11)$$

$$x+1 = \frac{\lg 11}{\lg 7}$$

$$x = \frac{\lg 11}{\lg 7} - 1 = 0{,}232$$

Aufgaben zu linearen Gleichungen: Aufgaben 134 – 155

Lösen von quadratische Gleichungen

Überführen in Normalform

Bei sog. Quadratischen Gleichungen kommen die Unbekannten in der Potenz 2 vor. Grundsätzlich müssen alle quadratischen Gleichungen in die sog. Normalform, d.h. in die Form $x^2 + px + q = 0$ überführt werden.

Dann kann man entweder zwei oder eine oder keine Lösung ermitteln.

Beispiel:

$$\frac{3x+4}{x+5}+\frac{x-11}{x-1}=1 \quad \Big| \quad \cdot(x+5)(x-1)$$

$$(3x+4)(x-1)+(x-11)(x+5)=(x+5)(x-1)$$

$$3x^2-3x+4x-4+x^2+5x-11x-55=x^2-x+5x-5$$

$$4x^2-5x-59=x^2+4x-5$$

$$3x^2-9x-54=0$$

$$x^2-3x-18=0$$

Quadratische Ergänzung

Um quadratische Gleichungen zu berechnen, gibt es verschiedene Verfahren. In der Schule wird zumeist zunächst die **quadratische Ergänzung** gelehrt.

Dabei wird die Gleichung zu einem Binom zusammengefasst, um dann zur Lösung von x zu gelangen.

$$x^2+8x+16=0$$

$$(x+4)^2=0$$

$$x+4=0$$

$$x=-4$$

Dieses Verfahren kann auch angewandt werden, wenn die Gleichung nicht so offensichtlich ein Binom darstellt. Dabei wird die Gleichung so mit einer Zahl erweitert, dass wieder ein Binom entsteht. Entscheidend ist dabei die Zahl vor dem x , sie muß 2ab entsprechen.

$$x^2-6x-16=0$$

$$x^2-6x=16$$

$$x^2-6x+9=16+9$$

$$(x-3)^2=25$$

$$x_1-3=5 \vee x_2-3=-5$$

$$x_1=8 \vee x_2=-2$$

pq-Formel

Dieses Verfahren ist jedoch bei Brüchen oder Dezimalzahlen schwierig anzuwenden. Daher ist die **pq-Formel** das gängigste Verfahren zum Lösen von quadratischen Gleichungen. Dieses Verfahren ist auch bei Brüchen, Wurzeln, o.ä. noch einigermaßen gut zu handhaben.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Hierbei werden die Werte für p und q in die Formel eingesetzt und dann x berechnet.

Beispiel:
$x^2 + 15 = 8x$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{(-8)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-8)^2}{4} - 15} \\ &= \frac{8}{2} \pm \sqrt{\frac{64}{4} - \frac{60}{4}} \\ &= 4 \pm \sqrt{1} \\ &= 4 \pm 1 \\ x_1 &= 4 + 1 \vee x_2 = 4 - 1 \\ x_1 &= 5 \vee x_2 = 3 \end{aligned}$$

Mondschein-Formel:

Andere haben in der Schule die sogenannte **Mondschein-Formel** gelernt, bei der eine quadratische Gleichung nicht zuerst in die Normalform gebracht werden muß:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel:
$3x^2 - 8x + 5 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \bullet 3 \bullet 5}}{2 \bullet 3} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6}$$

$$x_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \qquad x_2 = \frac{6}{6} = 1$$

Aufgaben zu quadratischen Gleichungen: Aufgaben 156 – 163

Lösen von Gleichungen dritter Ordnung

(auch kubische Gleichungen genannt)

Wenn als höchste Potenz der Unbekannten in einer Gleichung eine 3 steht, so spricht man von einer Gleichung 3. Ordnung. z.B.: $x^3 + 5x^2 + 10x = 0$ Hier kann es maximal 3 Lösungen geben.

Manche dieser Gleichungen – genau die, die kein absolutes Glied, also keinen Term ohne x besitzen – lassen sich durch **Ausklammern** lösen.

$$x^3 + 5x^2 + 10x = 0$$

$$x(x^2 + 5x + 10) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 + 5x + 10 = 0$$

> weiter mit pq-Formel

Zur Lösung von Gleichungen, die ein absolutes Glied enthalten, haben Sie in der Schule die **Polynomdivision** gelernt:

Beispiel:
$x^3+9x^2+24x+16=0$

1. Schritt: absolute Zahl auf die andere Seite ,d.h. die Gleichung so umformen, dass die absolute Zahl alleine auf einer Seite steht.

$$x^3 + 9x^2 + 24x = -16$$

2. Schritt: Eine Lösung für x durch probieren finden

$x = 1?$	$x = -1?$
$1^3 + 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 = -16$	$(-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (-1) = -16$
$34 \neq -16$	$-16 = -16$

3. Schritt: Gefundene Lösung so umformen, dass auf einer Seite der Lösungsgleichung Null steht.

$$x_1 = -1$$

$$x + 1 = 0$$

4. Schritt: Polynomdivision durchführen, d.h. die Ausgangsgleichung durch die „Lösungsgleichung“ teilen.

$(x^3+9x^2+24x+16):(x+1)=x^2+8x+16$

$-(x^3+x^2)$

$8x^2+24x$

$-(8x^2+8x)$

$16x+16$

$-(16x+16)$

0

5. Schritt: Errechnete quadratische Gleichung mit pq – Formel lösen.

$$x^2+8x+16=0$$

$$x_{2,3}=-4\pm\sqrt{\frac{64}{4}-16}$$

$$=-4\pm 0$$

$$x_{2/3}=-4$$

6. Schritt: Alle für x erhaltenen Lösungen zusammenfassen.

$x_1=-1$ $\qquad$ $x_{2/3}=-4$

Als – meiner Meinung nach einfachere – Alternative zur Polynomdivision möchte ich Ihnen das **Horner Schema** vorstellen:

Beispiel:
$x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$

1. Schritt: Eine Lösung für x durch probieren finden:

Erste Nullstelle: $x_1 = -1$

2. Schritt: Das Horner Schema aufstellen:

Dazu stellt man eine Tabelle auf, die in der ersten Zeile die Koeffiizienten der Gleichung enthält. Das erste Element der zweiten Zeile ist immer 0.

1	–8	5	14
0			

Nun addiert man die erste Zeile auf:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -8 & 5 & 14 \\ 0 & & & \\ \hline 1 & & & \end{array}$$

Dieses Ergebnis multipliziert man mit der ersten gesuchten Nullstelle, um das zweite Element der zweiten Zeile zu erhalten:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -8 & 5 & 14 \\ 0 & -1 & & \\ \hline 1 & & & \end{array}$$

Diesen Vorgang wiederholt man, bis die Tabelle vollständig ausgefüllt ist. Das letzte Element muss dabei Null ergeben.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -8 & 5 & 14 \\ 0 & -1 & 9 & -14 \\ \hline 1 & -9 & 14 & 0 \end{array}$$

Das Ergebnis sind die Koeffizienten der quadratischen Gleichung, die man auch mit der Polynomdivision erhalten hätte:
$x^2 - 9x + 14 = 0$

3. Schritt: Lösen der quadratischen Gleichung:

$$x_{2/3} = -\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{56}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2}$$

4. Schritt: Zusammenstellen der Ergebnisse:

$x_1 = (-1\ ;0)$ $x_2 = (7\ ;\ 0)$ $x_3 = (2\ ;0)$

Aufgaben zu Gleichungen dritter Ordnung
Aufgaben 164 – 167

Berechnen von Ungleichungen

Das Berechnen von Ungleichungen (< , > , ≤ , ≥)erfolgt synonym zum Rechnen mit Gleichungen.

Ausnahme: Wenn man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine solche teilt dreht sich das Ungleichheitszeichen um.
Beispiel: $-3x \geq 18 \quad | : -3$
$x \leq -6$

Sind die Seiten einer Ungleichung beide positiv oder beide negativ, gilt: Bei Kehrwertbildung dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Beispiel: $7 < 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{7} > \frac{1}{10}$ $\qquad -2 > -3 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$

Bei Ungleichungen mit Brüchen ist stets darauf zu achten, daß der Nenner nicht Null werden darf.

Beispiel: $\frac{3x-1}{2x+2} > 1$

Hier muß man zwei Fälle unterscheiden: 2x + 2 > 0 oder 2x + 2 < 0

$2x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$

$\frac{3x-1}{2x+2} > 1 \quad \Big| \quad \bullet(2x+2) \quad$ da > 0 kein Wechsel des Ungleichheitszeichens

$3x - 1 > 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3 \quad$ (Bedingung $x > -1$ ist erfüllt)

$2x + 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < -2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$

$\frac{3x-1}{2x+2} > 1 \quad \Big| \quad \bullet(2x+2) \quad$ da < 0 Wechsel des Ungleichheitszeichens

$3x - 1 < 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3 \quad$ (Bedingung $x < -1$ muß zusätzlich erfüllt sein)

Bei quadratischen Ungleichungen ist zu beachten, daß eine Wurzel ein positives und ein negatives Ergebnis haben kann.

Beispiel 1:
$x^2 - 13 > 3$

$x^2 > 16$

$\sqrt{x^2} > \sqrt{16}$

$|x| > 4$

$x > -4 \quad$ oder $\quad x > +4$

Beispiel 2:
$(x + 2)^2 < 9$

$$\sqrt{(x+2)^2} < \sqrt{9}$$

$$|x+2| < 3$$

$$x+2 > -3 \quad \Rightarrow \quad x > -5$$

$$x+2 < 3 \quad \Rightarrow \quad x < 1$$

Aufgaben zu Ungleichungen:
Aufgaben 168 – 177

Lineare Gleichungssysteme

Wir haben schon darüber gesprochen, was **lineare Gleichungen** sind:
Gleichungen, in denen die Unbekannte nur in der 1. Potenz vorkommt.

Kommen mehr als eine Unbekannte in erster Potenz vor, spricht man von einem **linearen Gleichungssystem**. Um ein solches Gleichungssystem eindeutig lösen zu können, müssen – so wird es in der Schule gelehrt – ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte vorhanden sein, d.h., bei zwei Unbekannten zwei Gleichungen.

Beispiel : I $3x - 8 = 2y$

II $4y + 5x - 14 = 0$

Um ein solches Gleichungssystem zu lösen gibt es mehrere Verfahren. In der Schule werden i.a. folgende Verfahren gelehrt:

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additions- bzw. Subtraktionsverfahren

Für kompliziertere Gleichungsverfahren gibt es auch die
- Gauß'sche Eliminationsmethode und die
  Determinantenmethode mit der Cramer'schen Regel.

Die beiden letztgenannten Methoden Kenntnisse aus der linearen Algebra, insbesondere der Matrizenrechnung, voraussetzen. Sie werden im Kurs „Wirtschaftsmathematik“ gelehrt.

Vorraussetzung für jede dieser Methoden ist, daß die Gleichungen erst zusammengefasst und sortiert werden.
Zu unserem **Beispiel** oben:

Aus I $3x - 8 = 2y$

II $4y + 5x - 14 = 0$

Ergibt sich durch Umformen:

I $3x + 2y = 8$

II $5x + 4y = 14$

Randbemerkung:
Alle beschriebenen Verfahren finden ebenso bei 3 Gleichungen mit drei oder mehr Unbekannten Anwendung.

Gleichsetzungsverfahren

Hierbei werden die Gleichungen nach derselben Unbekannten aufgelöst und gleichgesetzt.

Nehmen wir als **Beispiel** das Beispiel von eben:

I 3x+2y=8

II 5x+4y=14

1. Schritt: Gleichungen nach x bzw. y auflösen:

I
$$3x+2y=8$$
$$2y=8-3x$$
$$y=4-\frac{3}{2}x$$

II
$$5x+4y=14$$
$$4y=14-5x$$
$$y=\frac{7}{2}-\frac{5}{4}x$$

2. Schritt: Die Gleichungen gleichsetzen:

I = II : $4-\frac{3}{2}x=\frac{7}{2}-\frac{5}{4}x$

3. Schritt: Die „neue“ Gleichung nach der verbliebenen Unbekannten (y bzw. x) auflösen:

$$4-\frac{3}{2}x=\frac{7}{2}-\frac{5}{4}x$$
$$4-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}x$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x \qquad \Rightarrow \qquad x=2$$

4. Schritt: Den berechneten y – Wert bzw. x - Wert in eine der nach x bzw. y aufgelösten Gleichungen einsetzen und die andere Unbekannte (x bzw. y) berechnen:

x in I: $x=2 \qquad \Rightarrow \qquad y=4-\frac{3}{2}\cdot 2 \qquad \Rightarrow \qquad y=1$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $L=\{(2\,;1)\}$

Einsetzungsverfahren

Hierbei wird eine Gleichung nach einer Unbekannten aufgelöst und in eine andere Gleichung eingesetzt.

Beispiel:

I $3x + 2y = 14$

II $x - y = 13$

1. Schritt: Eine Gleichung nach x oder y auflösen:

II $$\begin{aligned} x - y &= 13 \\ x &= 13 + y \end{aligned}$$

2. Schritt: Den für x bzw. y erhaltenen Term in eine andere Gleichung einsetzen:

II in I: $3 \bullet (13 + y) + 2y = 14$

3. Schritt: Die neue Gleichung nach y bzw. x auflösen:

$$\begin{aligned} 39 + 12y + 2y &= 14 \\ 5y &= -25 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

4. Schritt: Den berechneten y – Wert bzw. x - Wert in eine der nach x bzw. y aufgelösten Gleichungen einsetzen und x bzw. y berechnen:

$x = 13 + y$

y in II: $y = -5 \Rightarrow x = 13 + (-5)$

$x = 8$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $L = \{(8\,;-5)\}$

Additions- bzw. Subtraktionsverfahrenverfahren

Die Gleichungen so addieren oder voneinander subtrahieren, dass eine Unbekannte herausfällt.

Beispiel:

I $x + y = 13$

II $3x + 2y = 14$

1. **Schritt**: Eine der Gleichungen so mit einer Zahl multiplizieren, dass die Anzahl von x bzw. y gleich ist:

   I $\cdot(-3)$: $-3x - 3y = -39$

2. **Schritt:** Die Gleichungen addieren (oder subtrahieren):

   I + II : $-3y + 2y = -39 + 14$

3. **Schritt**: Die „neue“ Gleichung nach y bzw. x auflösen:

   $-y = -25$

   $y = 25$

4. **Schritt:** Den berechneten Wert für y bzw. x in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen und x bzw. y berechnen:

   $x + y = 13$

   y in I: $y = 25 \Rightarrow x + 25 = 13$

   $x = -12$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $L = \{(-12;25)\}$

In der Praxis wendet man häufig eine Kombination der drei Verfahren an.

Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen:
Aufgaben 178 – 192

Berechnen von Ableitungen

Konstanten-Regel:

f(x) = c f‘(x) = 0

Beispiel:

f(x) = 3 f‘(x) = 0

Potenz-Regel:

$f(x) = x^n$ $f‘(x) = n \bullet n^{n-1}$

Beispiele:

$f(x) = x^3$ $f‘(x) = 3x^2$

$f(x) = x^{10}$ $f‘(x) = 10x^9$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $f'(x) = -1 \bullet x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$ $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3 \bullet \sqrt[3]{x^4}}$

Regel für einen konstanten Faktor (Faktorregel):

(c • f)‘ (x) = c • f‘(x)

Beispiel:

$f(x) = 3x^2$ $f‘(x) = 3 \bullet 2x = 6x$

Summen- und Differenzenregel:

$f(x) = g(x) \pm h(x)$ $f‘(x) = g‘(x) \pm h'(x)$

Beispiele:

$f(x) = x^2 + 5x$ $f’(x) = 2x + 5$

$F(x) = 4x^3 \bullet (2x^2 + 2) = 8x^5 + 8x^3$ $f’(x) = 40x^4 + 24x^2$

$$f(x) = 4x^2 + 7x - \frac{1}{\sqrt{x}} = 4x^2 + 7x - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 8x + 7 - \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) = 8x + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

f(x) = sin x – 2cos x f‘(x) = cos x – 2(–sin x) = cos x + 2sin x

Einige wichtige Grundableitungen**:**

f(x) =	**$\mathbb{D}$ f**	**f'(x) =**	**$\mathbb{D}$ f'**
c = const.	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
$x^n \quad n \geq 1$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n \quad n < 1$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
sin x	$\mathbb{R}$	cos x	$\mathbb{R}$
cos x	$\mathbb{R}$	– sin x	$\mathbb{R}$
tan x	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
cot x	$(0\ ,\ \pi)$	$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(\sin x)^2}$	$(0\ ,\ \pi)$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$
$\sqrt[n]{x}$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$	$\frac{1}{n \bullet \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
e^{x^n}	$\mathbb{R}$	$e^{x^n} \bullet n \bullet x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
ln x	$x \in \mathbb{R}_+$	$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\}$
$\ln x^n$	$x \in \mathbb{R}_+$	$\frac{1}{x^n} \bullet n \bullet x^{n-1}$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$
$a^x \quad a > 0$	$\mathbb{R}$	$a^x \bullet \ln a$	$\mathbb{R}$
$\log_a x$	$x \in \mathbb{R}_+$	$\frac{1}{x \bullet \ln a}$	$x \in \mathbb{R}_+$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Regeln für komplexere Ableitungen:

Produktregel:

$f(x) = g(x) \bullet h(x)$ $\quad f'(x) = g'(x) \bullet h(x) + g(x) \bullet h'(x)$ $\quad$ oder kurz: $f' = g' \bullet h + g - h'$

Beispiele:

$f(x) = x^4 \bullet x^3$ $\quad f'(x) = 4x^3 \bullet x^3 + x^4 \bullet 3x^2 = 4x^6 + 3x^6 = 7x^6$

$f(x) = (3x^2 + 2) \bullet (x^2 - 1)$ $\quad f'(x) = 6x \bullet (x^2 - 1) + (3x^2 + 2) \bullet 2x = 12x^3 - 2x$

$f(x) = \sin x \bullet x^2$ $\quad f'(x) = \cos x \bullet x^2 + \sin x \bullet 2x$

$f(x) = 3x^2 \bullet \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = 6x \bullet \sqrt{x} + 3x^2 \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}} = 6x \bullet \sqrt{x} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x}}$

Quotientenregel:

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $\quad f'(x) = \frac{g'(x) \bullet h(x) - g(x) \bullet h'(x)}{\left(h(x)\right)^2}$ $\quad$ oder kurz: $f' = \frac{g' \bullet h - g \bullet h'}{h^2}$

Beispiele:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x \bullet \left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right) \bullet 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

$f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$ $\quad f'(x) = \frac{1 \bullet \left(x^3 + 1\right) - x \bullet \left(3x^2\right)}{\left(x^3 + 1\right)^2} = \frac{x^3 + 1 - 3x^3}{\left(x^3 + 1\right)^2} = \frac{-2x^3 + 1}{\left(x^3 + 1\right)^2}$

$$f(x) = \frac{2x + 10}{4x - 7}$$

$$f'(x) = \frac{2 \bullet (4x - 7) - (2x + 10) \bullet 4}{(4x - 7)^2} = \frac{8x - 14 - 8x - 40}{16x^2 - 56x + 49} = \frac{-54}{16x^2 - 56x + 49}$$

$f(x) = \frac{1}{2x + \sqrt{x}}$ $\quad f'(x) = \frac{0 \bullet \left(2x + \sqrt{x}\right) - 1 \bullet \left(2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2x + \sqrt{x}\right)^2} = \frac{-2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(2x + \sqrt{x}\right)^2}$

Reziprokenregel:
Die Reziprokenregel ist eine Sonderform der Quotientenregel. Es gilt:

$$f(x)=\frac{1}{g(x)} \qquad f'(x)=\frac{-g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} \qquad \text{oder kurz: } f'=\frac{-g'}{g^2}$$

Beispiel:

$$f(x)=\frac{1}{x^3} \qquad f'(x)=\frac{-3x^2}{\left(x^3\right)^2}=\frac{-3x^2}{x^6}=-\frac{3}{x^4}$$

Kettenregel:
Die Kettenregel wendet man für sog. **verkettete Funktionen** an, bei denen verschiedene Funktionsvorschriften nacheinander ausgeführt werden. Z.B. ist die Funktion $f(x) = (\sin x)^2$
eine solche verkettete Funktion, denn man muß zunächst sin x berechnen und dann das Ergebnis quadrieren. Den Ausdruck, den man zunächst auf das x anwenden muß (hier sin x) bezeichnet man auch als **innere Funktion**, das Quadrieren ist dann die sog. **äußere Funktion**.

Die Ableitung einer solchen Funktion berechnet man nun durch:
Ableitung gesamt = innere Ableitung • äußere Ableitung. Formal gilt:
$f(x) = g(h(x)) \qquad f'(x) = h'(x) \bullet g'(h(x))$

Beispiele:

$f(x) = (\sin x)^2 \qquad f'(x) = \cos x \bullet 2(\sin x)^1 = 2 \bullet \cos x \bullet \sin x$
$f(x) = (x + 5)^{100} \qquad f'(x) = 1 \bullet 100(x + 5)^{99} = 100(x + 5)^{99}$

$$f(x)=\sqrt{5x} \qquad f'(x)=5\bullet\frac{1}{2\sqrt{5x}}=\frac{5}{2\sqrt{5x}}$$

$$f(x)=\sqrt{x^3+2x} \qquad f'(x)=\left(3x^2+2\right)\bullet\frac{1}{2\sqrt{x^3+2x}}=\frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}}$$

$$f(x)=\left(4x^2+2\right)^3 \qquad f'(x)=\left(8x\right)\bullet 3\bullet\left(4x^2+2\right)^2=24x\bullet\left(4x^2+2\right)^2$$

Höhere Ableitungen

Hat man die Ableitung einer Funktion f(x) gebildet, erhält man wieder eine Funktion f'(x), die nun ihrerseits wieder differenzierbar sein kann. Diese Ableitung bezeichnet man dann als **zweite Ableitung** f''(x). Läßt sich auch diese Funktion ableiten, erhält man die **dritte Ableitung** f'''(x) usw. Allgemein spricht man auch von **höheren Ableitungen**.

Alternative Schreibweisen sind:

$f''(x)=\frac{df^2}{dx^2}=\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$ $\quad$ $f'''(x)=\frac{df^3}{dx^3}=\frac{\partial f^3}{\partial x^3}$ $\quad$ $f''''(x)=\frac{df^4}{dx^4}=\frac{\partial f^4}{\partial x^4}$ $\quad$ usw.

Beispiel:

Die ersten 5 Ableitungen von f(x) = sin x lauten:
f'(x) = cos x f''(x) = – sin x f'''(x) = – cos x f''''(x) = sin x f'''''(x) = cos x

Beispiel: $y = 8x^5 + 6x^3$

$y' = 40x^4 + 18x^2$

$y'' = 160\,x^3 + 36\,x$

$y''' = 480\,x^2 + 36$

$y'''' = 960\,x$

$y''''' = 960$
$y'''''' = 0$

Aufgaben zu den Ableitungen:
Aufgaben 193 – 206

Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und vereinfachen Sie sie so weit wie möglich:

1. $(3q - 5r) - (2q + 4r) - (q - 11r)$
2. $8a - a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [-(-a + b)]$
3. $(20-5)-\left[3\bullet 5-(10-4)\right]-\left[(5\bullet 2+3\bullet 1)-\left(2\bullet(-4)-5\right)\right]$
4. $10y+9z-\left[-\left(5z\bullet(-y)\right)+3z\right]$
5. $\left|\frac{4-3}{3}-1\right|$
6. $\frac{2ax+8ab-2ay}{2ax-2ay}$
7. $-4\bullet\left(-2a+\frac{3}{2}b\right)$
8. $3a\left(a^2-5a+1\right)-4a^2(a-1)$
9. $(a-2)(4-a)$
10. $(2x - 3y) \bullet (-5u)$
11. $(2a - 3b) \bullet (4x + 5y)$
12. $(3u - 7w) \bullet (5x - 3y)$
13. $(5u - 1) \bullet (2x - 3y)$
14. $(2x - 3y) \bullet (a - 2b + 3c)$
15. $(2x + 3y) \bullet (x + 2u - 3v)$
16. $(x+y)(2x-4y)-(3x+y)(2x-y)$

Kürzen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich!

17. $\frac{72}{120}$
18. $\frac{28}{98}$
19. $\frac{51}{136}$
20. $\frac{63}{77}$

21. $\frac{15}{65}$

22. $\frac{3xy}{6x^2}$

23. $\frac{(a+b)\bullet c}{d\bullet(a+b)^2}$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

24. $\frac{4}{6}+\frac{3}{12}$

25. $\frac{5}{18}:\frac{25}{54}$

26. $\frac{5}{9}\bullet\frac{3}{5}$

27. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$

28. $\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{5}{6}$

29. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}}+\frac{7}{10}$

30. $\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\bullet\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}-\frac{2}{6}}$

31. $\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}-\frac{5}{12}+\frac{1}{3}}$

32. $\frac{\frac{65}{84}}{\frac{5}{7}}$

33. $\frac{\frac{54}{60}}{\frac{3}{5}}$

34. $7\frac{5}{6}+11\frac{2}{3}$

35. $2\frac{17}{30}:7\frac{1}{25}$

36. $\dfrac{11\frac{5}{6}}{17\frac{3}{4}}$

37. $\frac{1}{2}\bullet 5$

38. $\dfrac{5}{\frac{2}{3}}$

Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

39. $(5u + 8w)^2$

40. $(a + b)^2 + (a - b)^2$

41. $(2x - 3y)^2$

42. $\left(\frac{3}{4}a-\frac{4}{5}b\right)\bullet\left(\frac{3}{4}a+\frac{4}{5}b\right)$

43. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

44. $(2ax + 7by) \bullet (2ax - 7by)$

45. $\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{2}y\right)$

46. $(5x + 4)^2 - (3x - 5)^2 + 4(x - 3)(x + 3)$

47. $(x - 1)^2 \bullet (x + 1)^2$

48. $(2x - 3y)^2 - (3x - 2y)^2$

Berechnen Sie im Kopf (möglichst einfach):

49. 31^2

50. 57^2

51. $78 \bullet 82$

52. 101^2

53. $65 \bullet 75$

54. 999^2

Stellen Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln als Produkte dar:

55. $16x^2 - 24x + 9$

56. $49u^2 - 42uv + 9v^2$

57. $81u^2 - 121v^2$

58. $144a^2x^2 - 81b^2y^2$

59. $-16u^2x^4 + 4w^4y^2$

60. $\frac{9}{16} - \frac{3}{2}x + x^2$

Vereinfachen Sie die folgenden Brüche mit Hilfe der binomischen Formeln so weit wie möglich :

61. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

62. $\frac{64a^2 - 32ab + 4b^2}{4a - b}$

63. $\frac{4x^2 - 9}{4x^2 + 12x + 11}$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und vereinfachen Sie sie so weit wie möglich:

64. $3^2 \bullet 3^4$

65. $(-2)^3 \bullet (-2)^5$

66. $10^{12-n} : 10^{n-8}$

67. $(a + b)^{x+1} \bullet (a - b)^{x+1}$

68. $\left(\frac{2}{x^3}\right)^{-4}$

69. $\left(-a^3\right)^4$

70. $(-2)^{-2}$

71. $(-0{,}125)^{-3}$

72. $\frac{(15x)^2}{5x^{-3}}$

73. $\left(-u^{-2}\right)^{-3}$

74. $27 \bullet 3^{-6}$

75. $\left(3a^2 \bullet b^{-2}\right)^{-3}$

76. $\left[\left(x^2\right)^3\right]^4$

77. $\left(0{,}2x^n \bullet 5x^{n-2}\right)^2$

78. $\left(\frac{1}{2}a^2b^3\right)^0$

79. $\frac{81ab - 9a^2b}{18ab^2 - 27b^2}$

80. $\frac{1}{2}x^3y^4z^2 \bullet \frac{2}{5}x^3y^5z^6$

81. $\left(\frac{x^2}{a^3}\right)^{-1} \bullet \left(\frac{3a^2}{4x^3}\right)^{-2} \bullet 5xa^{-4}$

82. $\left(\frac{x^2 \bullet y^{-4}}{x^{-2} \bullet y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

83. $\left(\frac{2^{-2}a^{-2}b^2}{3^{-5}a^{-2}b^5}\right)^{-1} \bullet \left(\frac{2^{-1}a^{-3}b^{-2}}{3^{-2}a^{-2}b^{-1}}\right)^2$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und vereinfachen Sie sie so weit wie möglich:

84. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

85. $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

86. $3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

87. $\sqrt{3} \bullet \sqrt{12}$

88. $\sqrt{\frac{2}{3}} \bullet \sqrt{\frac{3}{8}} \bullet \sqrt{\frac{4}{7}} \bullet \sqrt{7}$

89. $\left(\left(\sqrt{x}\right)^5\right)^4$

90. $\sqrt[4]{3^2}$

91. $-125^{\frac{5}{15}}$

92. $\sqrt{\frac{5x}{6}} : \sqrt{\frac{20}{6x}}$

93. $\sqrt{a^2\sqrt{a^5}}$

94. $\sqrt{x^3y} \cdot \sqrt[6]{x^3y^3}$

95. $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}$

96. $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \bullet \sqrt{a}$

97. $\sqrt[3]{\left(a^2 \cdot b\right)^4}$

98. $\frac{\left(5\sqrt{a\sqrt{b}}\right)^5}{\sqrt{b\sqrt{a^{-2}b}}}$

Schreiben Sie die folgenden Potenzgleichungen in Logarithmusgleichungen um:

99. $5^4 = 625$

100. $3^{-1} = \frac{1}{3}$

101. $4^5 = 1.024$

102. $16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

Berechnen Sie die folgenden Logarithmen:

103. $\log_7 343$

104. $\log_3 243$

105. $\log_4 2$

106. $\log_5 \frac{1}{625}$

107. $\log_{10} \sqrt{10}$

108. $\log_2 \sqrt[3]{2}$

109. $\log_a \sqrt[5]{a^2}$

110. $\log_5 0{,}2$

111. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

112. $\log_{\frac{1}{3}} 27$

Berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners:

113. $\log 8$

114. $\lg 3$

115. $\ln 5$

116. $\ln 2$

Berechnen Sie so einfach wie möglich:

117. $\lg 5 + \lg 10$

118. $\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{32}}$

119. $\log_5 \sqrt{6}$

120. $\log_3 \sqrt[4]{3 \bullet \sqrt{3}}$

121. $\log_7 12$

122. $\log_6 3.000$

Berechnen Sie die folgenden Summen:

123. $\sum_{i=1}^{5} i$

124. $\sum_{i=-1}^{2} (2i)^2 - i$

125. $\sum_{i=1}^{5} \frac{i-1}{i+2}$

126. $\sum_{i=1}^{3} 2\left(i^2 - i\right)$

127. $\sum_{i=1}^{5} \left(2i + 3i^2 - 4\right)$

128. $\sum_{n=0}^{4} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)$

129. $\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{3}{i}-\frac{4}{i+1}\right)$

Berechnen Sie die folgenden Produkte:

130. $\prod_{i=10}^{13} i$

131. $\prod_{i=1}^{6}\frac{1}{i}$

132. $\prod_{i=1}^{15}\left(\frac{i-1}{i^2+1}\right)$

133. $\prod_{i=1}^{20}\frac{i}{i+2}$

Lösen Sie die linearen Gleichungen:

134. $377 + x = 428$

135. $8(x + 3) + 27 = 171$

136. $(x + 6) – (x – 7) = (4x + 20) – (3 + 5x)$

137. $3x + 5 + x – 3 = 5x + 7 – x – 2$

138. $4\sqrt{x-2} = 2\sqrt{x+3}$

139. $(x + 2) \bullet (x – 2) + 3 \bullet (2x + 5) = (x + 3)^2 – 2(3x – 22)$

Lösen Sie die Textgleichungen:

140. Wenn man vier aufeinanderfolgende gerade Zahlen addiert, erhält man 348. Wie heißen diese vier Zahlen?

141. Herr Klein, seine Tochter Sophia und sein Enkel Felix haben, der Zufall hat's gefügt, am gleichen Tage Geburtstag. Tochter Sophia wurde am 26. Geburtstag ihres Vaters, Enkel Felix am 22. Geburtstag seiner Mutter geboren. "Heute feiern wir drei einen ganz besonderen Geburtstag", verkündet Opa Klein den zahlreich erschienenen Gästen, „wir werden zusammen gerade 100 Jahre alt".
Wie alt wird jedes der drei Geburtstagskinder?

142. Um 9.45 startet in Rom ein Privatflugzeug und fliegt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 550 km/h nach New York. Zwei Stunden später folgt ihr ein Jumbo-Jet mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 950 km/h. Wann und in welcher Entfernung von Rom überholt der Jumbo-Jet die Privatmaschine?

143. Aus echtem Jamaika-Rum mit einem Alkoholgehalt von 40 % will sich Herr Schniefnase einen kräftigen Grog brauen, mit dem er eine beginnende Erkältung bekämpfen will. Er nimmt o,o5 Liter Rum und gießt 0,2 l heißes Wasser dazu. Wieviel Prozent Alkohol enthält der Grog?

144. Eine Pumpe kann einen Swimmingpool in 80 Minuten füllen, eine zweite, leistungsfähigere Pumpe würde dazu nur 70 Minuten brauchen. Wie lange dauert das Füllen, wenn beide Pumpen gleichzeitig in Betrieb sind?

Lösen Sie die Bruchgleichungen:

145. $\frac{7}{18} = \frac{5}{6} - x$

146. $\frac{3}{4}x = \frac{4}{5}$

147. $\frac{x+5}{x+2} = 1 - \frac{6}{x+2}$

148. $\frac{4x}{3x+5} = \frac{8x-5}{6x}$

149. $\frac{x+3}{x-5} + \frac{2-x}{x-6} = 0$

150. $\frac{6}{x+3} = \frac{9x+9}{x \bullet (x+3)}$

151. $\frac{2x-3}{3x-5} - \frac{6x-11}{9x-17} = 0$

Lösen Sie die Exponentialgleichungen:

152. $4^{2x} = \frac{1}{2}$

153. $9^{-x} = \sqrt{27}$

154. $3^x = 12$

155. $5^{x-2} = 20$

Lösen sie die quadratischen Gleichungen:

156. $x^2 + 12x + 20 = 0$

157. $x^2 - 4x - 5 = 0$

158. $x^2 - \frac{4}{8}x - \frac{8}{16} = 0$

159. $x^2 + 8x = -20$

160. $(5x + 9) \bullet (x + 1) = (x - 1) \bullet (2x + 5)$

161. $2x + \frac{1}{x} = 3$

162. $\frac{x}{x+8} = \frac{x+3}{2x+1}$

163. $x^2 + 5x + 6 = 0$

Lösen Sie die Gleichungen dritter Ordnung:

164. $x^3 - x^2 - 6x = 0$

165. $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$

166. $6x^3 - 36x^2 + 18x + 60 = 0$

167. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Lösen Sie die Ungleichungen:

168. $4x + 17 > 113$

169. $6 - 2x > 24$

170. $(5 - x)(3 + x) > (2 + x)(6 - x)$

171. $5(3x - 2) > 12x - 9$

172. $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$

173. $x^2 + 4{,}2 < 3{,}5$

174. $x^2 > 25$

175. $(3x + 4)^2 - 2 < 23$

176. $\frac{x-3}{x-5} > 0$

177. $\frac{2x+4}{x+3} \leq 5$

Lösen Sie diese Gleichungssysteme mit dem Gleichsetzungsverfahren

178. $x + 2y = 3$
$x - 2y = 0$

179. $2x + y = 2$
$-8x + 4y = 2$

Lösen Sie diese Gleichungssysteme mit dem Einsetzungsverfahren:

180. $3x + y = 14$
$-x + y = -2$

181. $12x + 7y = 5$
$15x + 7y = 50$

Lösen Sie diese Gleichungssysteme mit dem Additions- bzw. Subtraktions-verfahren:

182. $2x + 5y = 2$
$3x - 15y = 48$

183. $19x + 4y = 18$
$3x - y = 11$

Lösen Sie diese Gleichungssysteme mit einem Verfahren Ihrer Wahl:

184.
$$12x - 5y = 22$$
$$12x + 3y = 6$$

185.
$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{3} \qquad \frac{x+1}{y+1} = \frac{12}{5}$$

186.
$$3x + 2y = 21$$
$$5x - 2y = 19$$

187.
$$24x + 7y = 10$$
$$8x - 35y = 78$$

188.
$$\frac{5}{3x+2} = \frac{6}{5y+4} \qquad \frac{4}{5y-2x} = \frac{11}{5x-2y}$$

189.
$$8x + 3y = 36$$
$$-5x + y = 12$$

190.
$$(x+12)(y-3) = (x-2)(y+5)$$
$$(2x+5)(3y-8) = (x+1)(6y-15)$$

191.
$$14x - 6y - 22z = 76$$
$$18x + 4y - 120z = 8$$
$$2x - 2y - 2z = 4$$

192.
$$2a - b + c = 5$$
$$-7a + 3b - 5c = -16$$
$$a + b + 2c = 1$$

Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung:

193. $f(x) = 3x^3 - 17x + 12$

194. $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2 = x^{-1} + 4x^2$

195. $f(x) = \frac{1}{2}x^{-1}$

196. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$

197. $f(x) = \sin(x^4 + 2x^2 - 1)$

198. $f(x) = \frac{x^3 + 5}{e^{2x}}$

199. $f(x) = (x + 2)^3$

200. $f(x) = 3\sin(2x)$

201. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}$

202. $f(x) = x^2 \bullet \sqrt[4]{x^3} = x^2 \bullet x^{\frac{3}{4}} = x^{2+\frac{3}{4}} = x^{\frac{11}{4}}$

203. $f(x) = 3e^x \bullet \sin(x^2)$

204. $f(x) = \sin(1 + x^2)$

205. $f(x) = 3x \bullet \cos(4x) + 24x - 7$

206. $f(x) = \sin(3x) \bullet \cos(2x^2)$

Lösungen

1. $2r$
2. $4a - 4b = 4(a - b)$
3. -20
4. $10y + 6z - 5yz$
5. $\frac{2}{3}$
6. $\frac{x + 4b - y}{x - y}$
7. $8a - 6b$
8. $-a^3 - 11a^2 + 3a$
9. $-a^2 + 6a - 8$
10. $-10ux + 15uy$
11. $8ax + 10ay - 12bx - 15by$
12. $15ux - 9uy - 35wx + 21wy$
13. $10ux - 15uy - 2x + 3y$
14. $2ax - 4bx + 6cx - 3ay + 6by - 9cy$
15. $2x^2 + 4ux - 6vx + 3xy + 6uy - 9vy$
16. $-4x^2 - xy - 3y^2$
17. $\frac{3}{5}$
18. $\frac{2}{7}$
19. $\frac{3}{8}$
20. $\frac{9}{11}$
21. $\frac{3}{13}$
22. $\frac{y}{2x}$
23. $\frac{c}{d \bullet (a + b)}$
24. $\frac{11}{12}$

25. $\frac{3}{5}$

26. $\frac{1}{3}$

27. $\frac{3}{2}$

28. $\frac{5}{16}$

29. 1

30. $\frac{35}{64}$

31. $-\frac{7}{40}$

32. $\frac{13}{12}$

33. $\frac{3}{2}$

34. $19\frac{1}{2}$

35. $\frac{35}{96}$

36. $\frac{2}{3}$

37. $\frac{5}{2}$

38. $\frac{15}{2}$

39. $25u^2 + 80uw + 64w^2$

40. $2a^2 + 2b^2$

41. $4x^2 - 12xy + 9y^2$

42. $\frac{9}{16}a^2 - \frac{16}{25}b^2$

43. $4ab$

44. $4a^2x^2 - 49b^2y^2$

45. $2x^2 - \frac{1}{4}y^2$

46. $20x^2 + 70x - 45$

47. $x^4 - 2x^2 + 1$

48. $-5x^2 + 5y^2$

49. 961

50. 3.249

51. 6.396

52. 10.201

53. 4.875

54. 998.001

55. $(4x - 3)^2$

56. $(7u - 3v)^2$

57. $(9u + 11v) \bullet (9u - 11v)$

58. $(12ax + 9by) \bullet (12ax - 9by)$

59. $(2w^2y + 4ux^2) \bullet (2w^2y - 4ux^2)$

60. $\left(\frac{3}{4} - x\right)^2$

61. $\frac{x+1}{x-1}$

62. $16a - 4b$

63. $\frac{(2x+3)(2x-3)}{(2x+3)^2+2}$ Achtung: Kürzen nicht möglich!

64. $3^6 = 729$

65. 256

66. 10^{20-2n}

67. $\left(a^2 - b^2\right)^{x+1}$

68. $\frac{x^{12}}{2^4} = \frac{x^{12}}{16}$

69. $-a^{12}$

70. $0{,}25$

71. -512

72. $45x^5$

73. $-u^6$

74. $\frac{1}{3^3} = 3^{-3} = 0{,}\overline{037}$

75. $\frac{1}{27}\bullet\left(\frac{b}{a}\right)^6$

76. x^{24}

77. $x^{4n-4}=\left(x^{n-1}\right)^4$

78. 1

79. $\frac{a(9-a)}{b(2a-3)}$

80. $\frac{1}{5}x^6y^9z^8$

81. $\frac{80}{9}\bullet\left(\frac{x}{a}\right)^5$

82. $\frac{x^2}{y^3}$

83. $\frac{b}{3a^2}$

84. $\sqrt{2}$

85. $2\sqrt{2}$

86. $2\sqrt{3}$

87. 6

88. 1

89. x^{10}

90. $\sqrt{3}$

91. -5

92. $\frac{x}{2}$

93. $a^{\frac{9}{4}}$

94. x^2y

95. $\frac{1}{4}$

96. $a+1$

97. $a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{4}{3}}$

98. $3125a^3b^{\frac{1}{2}}$

99. $\log_5 625 = 4$

100. $\log_3 \frac{1}{3} = -1$

101. $\log_4 1.025 = 5$

102. $\log_{16} \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

103. 3

104. 5

105. $\frac{1}{2}$

106. 4

107. $\frac{1}{2}$

108. $\frac{1}{3}$

109. $\frac{2}{5}$

110. -1

111. 2

112. -3

113. 0,90309

114. 0,47712

115. 1,6094

116. 0,6931

117. 1,6990

118. $2^{-\frac{3}{5}}$

119. 0,5566

120. $\frac{3}{8}$

121. 1,2770

122. 4,4684

123. 15

124. 22

125. $\frac{241}{140}$

126. 16

127. 175
128. 3,86
129. $\frac{67}{60}$
130. 17.160
131. $\frac{1}{720}$
132. 0
133. $\frac{1}{231}$
134. x = 51
135. x = 15
136. x = 4
137. keine Lösung!
138. $x = \frac{11}{3}$
139. x = 7
140. Die gesuchten Zahlen sind 84, 86, 88 und 90.
141. Felix wird 10, seine Mutter 32 und Opa Klein 58 Jahre alt.
142. Der Jumbo-Jet überholt also nach 4 Std. und 45 Min.
     Die Entfernung von Rom beträgt dabei $4\frac{3}{4} \bullet 550 = 2.612{,}5$ km.
143. x = 8%
144. Wenn beide Pumpen in Betrieb sind, dauert es 37 Minuten und 20 Sekunden, bis der Pool gefüllt ist.
145. $x = \frac{4}{9}$
146. $x = \frac{16}{15}$
147. Keine Lösung!
148. x = 1
149. x = 7
150. Keine Lösung, da für x = –3 der Nenner 0 wird.
151. x = 2
152. $x = -\frac{1}{4}$

153. $x = -\frac{3}{4}$

154. $x = 2{,}2619$

155. $x = 3{,}8613$

156. $x_1 = -2$ und $x_2 = -10$

157. $x_1 = 5$ und $x_2 = -1$

158. $x_1 = 1$ und $x_2 = -0{,}5$

159. keine Lösung

160. $x_1 = -\frac{5}{3}$ $x_2 = -2$

161. $x_1 = 1$ und $x_2 = 0{,}5$

162. $x_1 = 12$ und $x_2 = -2$

163. $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$

164. $x_1 = 0$ $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$

165. $x_1 = 3$ und $x_{2/3} = -4$

166. $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$ und $x_3 = 2$

167. $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$

168. $x > 24$

169. $x < -9$

170. $x < 1{,}5$

171. $x > \frac{1}{3}$

172. $x < \frac{7}{5}$

173. keine Lösung!

174. $x < -5$ oder $x > 5$

175. $x > -3$ oder $x < \frac{1}{3}$

176. $x > 5$ oder $x < 3$

177. $x \leq -\frac{11}{2}$ oder $x > -3$

178. $x = 3/2$ und $y = 3/4$

179. $x = 3/8$ und $y = 5/4$

180. $x = 4$ und $y = 2$

181. $x = 15$ und $y = 25$

182. $x = 6$ und $y = -2$
183. $x = 2$ und $y = -5$
184. $x = 1$ und $y = -2$
185. $x = 35$ und $y = 14$
186. $x = 5$ und $y = 4$
187. $x = 1$ und $y = -2$
188. $x = 6$ und $y = 4$
189. $x = 0$ und $y = 12$
190. $x = 2$ und $y = 3$
191. $x = 12$ $y = 8$ $z = 2$
192. $a = 3$ $b = 0$ $c = -1$
193. $f'(x) = 9x^2 - 17$
194. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 8x$
195. $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$
196. $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$
197. $f'(x) = (4x^3 + 4x) \bullet \cos(x^4 + 2x^2 - 1)$
198. $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x^3 - 10}{e^{2x}}$
199. $f'(x) = 3(x + 2)^2$
200. $f'(x) = 6 \cos(2x)$
201. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
202. $f'(x) = \frac{11}{4}\sqrt[4]{x^7}$
203. $f(x) = 3e^x\left(\sin(x^2) + 2x \bullet \cos(x^2)\right)$
204. $f'(x) = 2x \bullet \cos(1 + x^2)$
205. $f'(x) = 3 \bullet \cos(4x) - 12x \bullet \sin(4x) + 24$
206. $f'(x) = 3 \bullet \cos(3x) \bullet \cos(2x^2) - 4x \bullet \sin(3x) \bullet \sin(2x^2)$